Compléments de Mathématiques : Août 2010

Justifiez toutes vos réponses précisement !

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, on note $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction qui vaut 1 si $x \in A$ et 0 sinon.

1. Quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, évaluez l'intégrale ci-dessous :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\pi \mathrm{i} x}\, e^{-k \mathrm{i} x}\, \mathrm{d}x$$

2. Parmi les fonctionnelles suivantes $T_i : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$, déterminez lesquelles sont des distributions tempérées :

$$T_1(\varphi) = \ln(\varphi(0)) \qquad ; \qquad T_2(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, t^8\, \mathrm{d}t \qquad ; \qquad T_3(\varphi) = \varphi(\pi).$$

3. On considère les suite de fonctions (f_n), $(g_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies ci-dessous :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^2-n^2}{n^2+n+1} & \text{si } |x| \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad ; \qquad g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^5} & \text{si si } |x| \leq n^7 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Tracez les suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$, (sur deux graphes différents).
   (b) Etudiez la convergence simple et uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
   (c) Etudiez la convergence uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$.
   (d) Etudiez la convergence de (g_n) sur $\mathbb{R}$ au sens uniforme, au sens de $L^1(\mathbb{R})$ et au sens de $L^2(\mathbb{R})$.
   (e) A l'aide du point précédent, déduire la convergence de la suite $\int_0^1 g_n(x)\, \mathrm{d}x$.

4. Soit $h \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$, λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$.
   (a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ_1, λ_2 l'égalité ci-dessous est-elle vérifiée quel que soit $h \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$:

$$\inf_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2} \left(\int_0^{2\pi} |h(x) - \lambda_1 \sin(x) - \lambda_2 \cos(x)|^2 \mathrm{d}x \right) = \min_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2} \left(\int_0^{2\pi} |h(x) - \lambda_1 \sin(x) - \lambda_2 \cos(x)|^2 \mathrm{d}x \right).$$

   (b) Déterminez, si possible, les valeurs λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation ci-dessus, ainsi que la valeur de l'infimum, dans le cas où $h(x) = e^{\mathrm{i}x}$. Interprétez géométriquement votre résultat.

5. On considère la suite de fonctions $(h_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$h_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } n < x \leq n+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) La fonction h_n est-elle dérivable en tant que fonction ? Si oui, calculer sa dérivée, si non donner son domaine de dérivabilité.
   (b) Prouvez que h_n peut être vue comme un élément de $\mathcal{S}'$ et calculez sa dérivée distributionnelle.

   On considère la fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n(x)$.
   (c) Prouvez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $H(x) \leq x^2$.
   (d) Prouvez que H peut être vu comme un élément de $\mathcal{S}'$ et calculez sa dérivée distributionnelle.

6. Etudiez la convergence des séries suivantes au sens de $\mathcal{D}'$ et de $\mathcal{S}'$:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\delta}{n!} \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{n^7} \chi_{[-n,n]} \qquad \text{(c)} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{n^2} \chi_{[n,n+1]} \qquad \text{(d)} \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{[n,+\infty[} \qquad \text{(e)} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{[n,+\infty[} \right)'.$$