Compléments de Mathématiques : Janvier 2008

Justifier toutes vos réponses !

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, la fonction caractéristique de A, notée $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

1. Etudier la convergence de la série
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{[n,n+1[}(x),$$
   (a) au sens ponctuel sur $\mathbb{R}$,
   (b) au sens uniforme sur $\mathbb{R}$,
   (c) au sens uniforme sur K, un compact de $\mathbb{R}$,
   (d) au sens de L^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la série de Fourier (en série d'exponentielles complexes) de $\sin(x)$.
3. Calculer la transformée de Fourier de $e^{-x^2}\chi_{\mathbb{Q}}(x)$.
4. La fonctionnelle $T : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ définie par $T(\varphi) = \varphi^2(0)$ est-elle un élément de $\mathcal{D}'$?
5. Soit $\delta_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{D}'$ définie par $\delta_{\frac{1}{n}}(\varphi) = \varphi(\frac{1}{n})$, étudier la convergence, au sens de $\mathcal{D}'$ de la suite de distributions $\left(\delta_{\frac{1}{n}}\right)_{n\geq 1}$; même question pour la suite $\left(\left(\delta_{\frac{1}{n}}\right)'\right)_{n\geq 1}$.
6. Calculer la dérivée, au sens des distributions, des fonctions $\chi_{[0,1]}(x)$ et $\chi_{]0,1[}(x)$.
7. Soit $P_0(x) = 1 \in L^2([0,1],\mathbb{R})$.
   (a) Calculer $\|P_0\|_{L^2}$.
   (b) Trouver $a,\ b \in \mathbb{R}$ de telle sorte que $P_1(x) = ax + b$ soit de norme 1 et perpendiculaire à P_0 (dans $L^2([0,1],\mathbb{R})$).
   (c) Soit $f(x) = e^x \in L^2([0,1],\mathbb{R})$, la valeur de l'infimum ci-dessous est-elle atteinte ?
$$\inf\left\{\|f - c_0P_0 - c_1P_1\|_{L^2} \mid c_0,\ c_1 \in \mathbb{R}\right\}$$
   Si oui, donner les valeurs de c_0 et c_1 qui permettent de réaliser cet infimum.
   Si non, trouver (si possible) une autre fonction $f \in L^2([0,1],\mathbb{R})$ pour laquelle la valeur de l'infimum ci-dessus est atteinte.
8. Pour $n \in \mathbb{N}$ soient $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x^{n^2}$, et $\delta_n : \mathcal{S} \to \mathbb{R},\ \varphi \to \varphi(n)$. Etudier la convergence de la suite $(f_n\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au sens de $\mathcal{D}'$ et au sens de $\mathcal{S}'$.
9. Etudier la convergence des séries suivantes au sens de $\mathcal{S}'$.
$$\text{(a) } \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{[n,+\infty[} \qquad \text{(b) } \sum_{n\in\mathbb{N}} (\chi_{[n,+\infty[})' \qquad \text{(c) } \sum_{n\in\mathbb{N}} (\chi_{[n,+\infty[})''.$$