Compléments de Mathématiques : Janvier 2009

Justifiez toutes vos réponses !

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, on note $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction qui vaut 1 si $x \in A$ et 0 sinon.

1. Calculer la série de Fourier de la fonction $|\sin(x)|$. En déduire la valeur de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}$.
2. Calculer la transformée Fourier des deux fonctions suivantes : (a) $\chi_{[0,2]} * \chi_{[1,3]}$ (b) $\chi_{[0,5]} * \chi_{\mathbb{Z}}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $\delta_n \in \mathcal{S}'$ par $\langle \delta_n | \varphi \rangle = \varphi(n)$, quel que soit $\varphi \in \mathcal{S}$. Pour tout $1 \leq k \in \mathbb{N}$, on note par $\delta_n^{(k)}$ la dérivée k-ème de δ_n. Calculer les limites suivantes :
$$\text{(a)} \lim_{n\to+\infty} \delta_n \qquad \text{(b)} \lim_{n\to+\infty} \delta_n^{(k)}.$$
4. Soit $x \in \mathbb{R}$, la *partie entière de* x, notée $\mathrm{E}(x)$, est le plus grand entier satisfaisant $\mathrm{E}(x) \leq x$.
Par exemple, $\mathrm{E}(3) = 3$, $\mathrm{E}(0.2) = 0$, $\mathrm{E}(-1.1) = -2$, $\mathrm{E}(1.9) = 1$, $\mathrm{E}(\pi) = 3$.
   (a) Tracer le graphe la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{E}(x)$.
   (b) Prouver l'égalité suivante :
$$\mathrm{E}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{[n,+\infty[}(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{]-\infty,-n[}(x)$$
   (c) La fonction $\chi_{[n,+\infty[}(x)$ est-elle dérivable en tant que fonction ? Si oui, calculer sa dérivée, si non donner son domaine de dérivabilité.
   (d) La fonction $\chi_{[n,+\infty[}(x)$ est-elle dérivable en tant que distribution ? Si oui, calculer sa dérivée et en déduire la dérivée (distributionnelle) de $\mathrm{E}(x)$, si non donner son domaine de dérivabilité.
5. On considère la série de fonctions réelles définie par :
$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \qquad \text{où} \qquad f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   (a) Montrer que l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que S converge simplement est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   (b) Montrer que S converge simplement vers la fonction $g(x)$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :
$$g(x) = \begin{cases} \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
   (c) Etudier la convergence de la série S au sens uniforme sur $]0, +\infty[$.
   (d) Etudier la convergence de la série S au sens uniforme sur $[a, +\infty[$, où $0 < a \in \mathbb{R}$.
   (e) Déterminer si $S \in L^1(\mathbb{R})$ et si $S \in L^2(\mathbb{R})$.
6. On considère l'espace $L^2(\mathbb{R}^+)$ muni de son produit scalaire standard.
   (a) Montrer que les fonctions e^{-x} et e^{-2x} sont dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ et calculer leurs normes. Sont elles orthogonales ? On note V l'espace vectoriel engendré par par ces deux fonctions.
   (b) On définit $f_1(x) = \sqrt{2}e^{-x}$ et $f_2(x) = 4e^{-x} - 6e^{-2x}$. Montrer que $\{f_1, f_2\}$ est une base orthonormée de V.
   (c) Montrer que $f_3 = e^{-3x}$ est dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ et calculer la distance de f_3 à V. La fonction f_3 est-elle dans l'espace vectoriel V ?
7. Etudier la convergence des séries suivantes au sens de $\mathcal{D}'$ et de $\mathcal{S}'$:
$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{+\infty} x^2 \chi_{[n,+\infty[} \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{n^3} \delta_n \qquad \text{(c)} \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{[-n,n]}.$$