Compléments de Mathématiques : Janvier 2010

Justifiez <u>toutes</u> vos réponses <u>précisement</u> !

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, on note $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction qui vaut 1 si $x \in A$ et 0 sinon.

1. Quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, évaluez l'intégrale ci-dessous :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{5\mathbf{i}x}\, e^{-k\mathbf{i}x}\, \mathrm{d}x$$

   En déduire la série de Fourier de la fonction $e^{5\mathbf{i}x}$. Le calcul des intégrales ci-dessus était-il nécéssaires ?

2. Parmi les fonctionnelles suivantes $T_i : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$, déterminez lesquelles sont des distributions tempérées :

$$T_1(\varphi) = \frac{1}{\varphi(0)} \quad ; \quad T_2(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, e^{t^8}\, \mathrm{d}t \quad ; \quad T_3(\varphi) = \sup_{t\in\mathbb{R}}(\varphi(t)) \quad ;$$

$$T_4(\varphi) = \varphi(17) \quad ; \quad T_5(\varphi) = \begin{cases} 1 \text{ si } \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|\, \mathrm{d}t > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad ; \quad T_6(\varphi) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \mathrm{d}t \text{ si } \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|\, \mathrm{d}t > 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

3. On considère les suite de fonctions (f_n), (g_n), $(h_n) : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies ci-dessous :

$$f_n(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x+\frac{1}{n}}} \quad ; \quad g_n(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{n^2} & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases} \quad ; \quad h_n(x) = \frac{(2x)^n}{1+(2x)^n}.$$

   (a) Tracez les suites de fonctions $(f_n)_{n\ge1}$, $(g_n)_{n\ge1}$, et $(h_n)_{n\ge0}$ (sur trois graphes différents).

   (b) Etudiez la convergence simple de (f_n) sur $(0,1)$. En déduire (si possible) la convergence de la suite $\int_0^1 f_n(x)\, \mathrm{d}x$.

   (c) Etudiez la convergence de (g_n) sur $(0,1)$ au sens uniforme, au sens de $L^1(0,1)$ et au sens de $L^2(0,1)$.

   (d) Etudiez la convergence de (h_n) au sens simple sur $[0,1]$, au sens uniforme sur $[0,1]$, au sens uniforme sur $[0,a]$ avec $a < \frac{1}{2}$.

4. Soit $g \in L^2([0,1],\mathbb{R})$, λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, on considère les deux polynômes $p_1(x) = 1$ et $p_2(x) = -2\sqrt{3}x + \sqrt{3}$.

   (a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ_1, λ_2 l'égalité ci-dessous est-elle vérifiée quel que soit $g \in L^2([0,1],\mathbb{R})$:

$$\inf_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2} \left(\int_0^1 |g(x) - \lambda_1 p_1(x) - \lambda_2 p_2(x)|^2 \mathrm{d}x \right) = \min_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2} \left(\int_0^1 |g(x) - \lambda_1 p_1(x) - \lambda_2 p_2(x)|^2 \mathrm{d}x \right).$$

   (b) Déterminer cet infimum dans le cas où $g(x) = x + 1$. Interpréter géométriquement votre résultat.

   (c) Déterminer, si possible, les valeurs λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation ci-dessus dans le cas où $g(x) = x^2$.

5. On considère la fonction sign : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \ge 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\mathrm{sign}(x-n)$ est-elle dérivable en tant que fonction ? Si oui, calculer sa dérivée, si non donner son domaine de dérivabilité.

   (b) Prouver que $\mathrm{sign}(x-n)$ peut être vue comme un élément de $\mathcal{S}'$ et calculer sa dérivée distributionnelle.

6. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (2 - |x|)\, \chi_{[-2,2]}$.

   (a) Tracez $f(x)$ (b) Calculez $\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}$ (c) Evaluez $\mathcal{F}(f(x))$.

7. Etudier la convergence des séries suivantes au sens de $\mathcal{D}'$ et de $\mathcal{S}'$:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\delta}{n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{n^4} \chi_{[n,n+3]} \qquad \text{(c)} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{sign}(x-n) \qquad \text{(d)} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{sign}(x-n) \right)'.$$