Compléments de Mathématiques : Janvier 2011

Justifiez toutes vos réponses précisement !

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, on note $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction qui vaut 1 si $x \in A$ et 0 sinon.

1. On considère les suites de fonctions $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies ci-dessous.

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n^2} + \frac{1-n}{n} & \text{si } n^2 - n < x \leq n^2 \\ -\frac{x}{n^2} + \frac{1+n}{n} & \text{si } n^2 < x \leq n^2 + n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad g_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq n \\ x - \frac{n+1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Tracez les fonctions f_1, f_2 et f_3.
   (b) Etudiez (i) la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$, (ii) la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$, (iii) la convergence uniforme de (f_n) sur K un compact de $\mathbb{R}$.
   (c) Calculez la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x \right)$.
   (d) Tracez les fonctions g_1, g_2 et g_3.
   (e) Calculez $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction limite pour la convergence simple de (g_n) sur $\mathbb{R}$.
   (f) Les fonctions g_n sont-elles continues sur $\mathbb{R}$?
   (g) Etudiez la convergence uniforme de (g_n) sur $\mathbb{R}$.
   (h) La fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
   (i) Pouviez-vous déduire la réponse de la question (h) à l'aide des réponses aux questions (e), (f) et (g) ?
   (j) Etudiez la convergence uniforme de (g_n) sur K un compact de $\mathbb{R}$.

2. Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert $L^2([0,1], \mathbb{R})$. Soit $n \geq 1$, on note $B_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ un système orthonormal (i.e. $\langle p_i, p_i \rangle = 1$ et $\langle p_i, p_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$) de $\mathcal{H}$ dans lequel chaque $p_i \in \mathbb{R}[x]$. On note M_n le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ engendré par B_n.
   (a) Prouvez que la fonction $e^x \in \mathcal{H}$.
   (b) Trouvez (si possible) $n \geq 1$ et B_n tels que $e^x \in M_n$.
   (c) Soient $n \geq 1$ et B_n tels que $e^x \notin M_n$. Est-il possible d'étendre B_n en un système orthonormal qui engendrera un sous-espace vectoriel M_e de dimension finie (et donc différent de $\mathcal{H}$) qui contiendra e^x.
   (Le(s) vecteur(s) que vous ajouterez à B_n pour engendrer M_e ne sont pas nécéssairement des polynômes.)

3. Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\delta_\alpha : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$, la distribution tempérée définie par $\delta_\alpha(\varphi) = \varphi(\alpha)$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\beta_n = \frac{n}{n+1}$. Calculez (si elles existent) les limites suivantes :

$$(i) \lim_{n\to+\infty} \delta_{\beta_n} \qquad (ii) \lim_{n\to+\infty} \delta'_{\beta_n} \qquad (iii) \lim_{n\to+\infty} \delta_n.$$

   (b) Simplifiez (si possible) les expressions suivantes :

$$(i)\ \delta_\pi \cdot \sin(x) + \delta_{2\pi} \cdot \cos(x) \qquad (ii)\ (\delta_\pi \cdot \sin(x) + \delta_{2\pi} \cdot \cos(x))' \qquad (iii)\ \mathcal{F}(\delta'_0 \cdot \cos(x) + \delta_0 \cdot \sin(x)).$$

4. On pose $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Calculez (si possible) la dérivée de χ_A en tant que fonction.
   Même question si χ_A est vue comme une distribution.

5. Parmi les fonctionnelles suivantes $T_i : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$, déterminez lesquelles sont des distributions tempérées :

$$T_1(\varphi) = \sin(\varphi(0)) \quad ; \quad T_2(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad T_3(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

6. Etudier la convergence des séries suivantes au sens de $\mathcal{D}'$ et de $\mathcal{S}'$:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi_{[n,n+1]}}{n} \qquad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{[0,\frac{1}{n}]} \qquad (c) \sum_{n=1}^{+\infty} (\chi_{[-\infty,\ln(n)]})' \qquad (d) \sum_{n=1}^{+\infty} e^{n^{2011}} \delta_n$$