Compléments de Mathématiques : Mars 2008

Justifier toutes vos réponses !

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, la fonction caractéristique de A, notée $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

1. Etudier la convergence de la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi_{[n,n+1[}(x)}{x}$$
   (a) au sens ponctuel sur $\mathbb{R}$,
   (b) au sens uniforme sur $\mathbb{R}$,
   (c) au sens uniforme sur K, un compact de $\mathbb{R}$,
   (d) au sens de L^1 sur $\mathbb{R}$,
   (e) au sens de L^2 sur $\mathbb{R}$.

2. On considère $\sin(x)$ élément du $\mathbb{C}$-espace de Hilbert $L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$.
   (a) Prouver (i) que $\cos(x) \in L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$ et (ii) qu'il est perpendiculaire à $\sin(x)$.
   (b) Soit M, le sous-espace vectoriel de $L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$ engendré par $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
   Trouver (s'il existe) l'élément y_0 de M qui satisfait l'égalité suivante :
$$\inf_{y\in M} \|e^{ix} - y\|_{L^2} = \|e^{ix} - y_0\|_{L^2}.$$
   En déduire la valeur de $\inf_{y\in M} \|e^{ix} - y\|_{L^2}$.
   Aide potentielle : $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$; $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$; $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$

3. On définit $\delta_n \in \mathcal{D}'$ par $\delta_n(\varphi) = \varphi(n)$ (on définit de la même façon $\delta_n \in \mathcal{S}'$) et $T_n \in \mathcal{S}'$ par $T_n(\varphi) = \varphi\left(\frac{ni}{2\pi}\right)$. On note S_1 (resp. S_2) les séries suivantes :
$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{nx}(\delta_n - \delta_n') \quad ; \quad S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{F}(T_n)(\delta_n - \delta_n').$$
   (a) Calculer la δ_n', la dérivée de δ_n au sens des distributions.
   (b) Etudier la convergence de la série S_1 au sens de $\mathcal{D}'$.
   (c) Etudier la convergence de la série S_1 au sens de $\mathcal{S}'$.
   (d) Calculer $\mathcal{F}(T_n)$, la transformée de Fourier de T_n dans $\mathcal{S}'$.
   (e) Etudier la convergence de la série S_2 au sens de $\mathcal{S}'$.