Quand les jeux mènent au prix Nobel...

Chamelot Sébastien

Table des matières

1 Introduction

Ce texte est un support à l'exposé de M^r Thomas Brihaye présenté à la Journée Math-Sciences du 25 mars 2010 à l'Université de Mons (UMONS). Il a été écrit (et illustré) par Sébastien Chamelot, étudiant de Master 1 en sciences mathématiques (finalité didactique) dans le cadre d'un projet réalisé sous la direction de Thomas Brihaye.

L'objectif premier de ce texte est de vous faire découvrir le domaine des mathématiques qu'est la théorie des jeux. Pour ce faire, nous commencerons par expliquer, sur la base d'exemples simples, les notions théoriques présentées dans l'exposé. Nous aborderons des concepts tels que les jeux sous forme stratégique, les stratégies strictement dominées, l'équilibre de Nash, les stratégies mixtes et nous énoncerons même le grand théorème de Nash. Dans ce texte, nous essaierons aussi de vous montrer que les mathématiques sont un domaine riche qui permettent aussi d'aborder des problèmes concrets. Au fil du texte, des exercices non résolus seront proposés au lecteur. Le lecteur courageux qui souhaite recevoir les corrections peut nous contacter à l'adresse suivante :

– sebastienchamelot@gmail.com
– thomas.brihaye@umons.ac.be

Je tiens à remercier M^r Thomas Brihaye et M^{elle} Stéphanie Bridoux pour leurs conseils avisés, l'inspiration, l'aide et le temps qu'ils ont bien voulu me consacrer et sans qui ce document n'aurait jamais vu le jour et cela malgré leur emploi du temps chargé.

Sans plus tarder, entrons dans le vif du sujet !

2 Jeux sous-forme stratégique

Dans la vie de tous les jours, nous rencontrons des situations où nous devons faire des choix. Par exemple, ce matin je n'ai pas envie d'aller en cours. Vais-je prendre le risque de sécher les cours ? Mon épouse refuse de me parler car j'ai oublié notre anniversaire de mariage. Pour me faire pardonner, dois-je lui offrir des fleurs, du chocolat ou un voyage à Thaïti ? On peut aussi trouver d'autres exemples, dans le domaine de la finance : est-il avantageux d'investir dans la *Globex Corporation* ?

Il y a d'autres exemples dans les jeux télévisés, pensez au jeu du 71, à tout le monde veut prendre sa place, au juste prix et vous pouvez en trouver d'autres dans les domaines de la biologie, la zoologie, la politique. Dans toutes ces situations, on demande aux différents acteurs (le mari, son épouse, les candidats d'un jeu télévisé, les politiciens,...) impliqués de faire un choix (acheter des fleurs ou du chocolat, pardonner ou non à son mari, "bliker" ou ne pas "bliker", augmenter ou baisser les taxes,...). Dès que tous les acteurs impliqués dans la situation ont fait leur choix, on en observe l'issue (une dispute ou un calin, une victoire ou une défaite,...). L'issue observée n'est pas forcément la meilleure, il peut y en avoir d'autres qui apportent plus (d'argent, de bonheur,...) à chacun des acteurs impliqués. Dans ce document, nous allons chercher des méthodes qui nous permettront de trouver des issues *"rationnelles"*. Pour introduire les notions mathématiques dont nous aurons besoin, nous travaillerons avec trois exemples : *le dilemme du prisonnier, le jeu du pierre-papier-ciseaux, le jeu d'investissement à deux joueurs.*

Exemple 2.1. (Dilemme du prisonnier) La police a arrêté Bob l'éponge et son ami Patrick l'étoile de mer. Ils sont accusés de vol de ballon. Bob et Patrick ont été placés dans deux salles différentes et sont donc dans l'incapacité de communiquer. Les policiers n'ont pas assez de preuves pour les inculper de vol. Cependant ils ont assez d'éléments pour les inculper de stupidité profonde. Dans le but d'essayer d'obtenir des aveux de la part des deux inculpés, les policiers proposent le marché suivant :

- si l'un des deux prévenus dénonce son complice, alors que ce dernier se tait, celui qui a parlé est remis en liberté alors que l'autre obtient une peine de 10 ans de prison ;
- si les deux complices se dénoncent entre eux, ils seront tous les deux condamnés à une peine de 5 ans de prison ;
- si les deux amis se taisent, la peine ne sera que de 3 ans de prison pour chacun, faute d'éléments au dossier.

A votre avis comment vont se comporter nos deux amis ?

Exemple 2.2. (Pierre-Papier-Ciseaux) Sabrina et Vinciane décident de jouer au célèbre jeu *Pierre-Papier-Ciseaux* dont voici les règles : chacune doit choisir entre la pierre, le papier ou les ciseaux, mais elles ne doivent pas le dire à voix haute. Une fois qu'elles ont choisi, elles comptent jusqu'à trois et disent en même temps ce qu'elles ont choisi. On a le rapport de force suivant : la pierre bat les ciseaux, les ciseaux battent la feuille et enfin la feuille bat la pierre. Pour pimenter leur partie, elles décident de parier de l'argent. La gagnante remportera 1€, alors que la perdante perdra 1€. En cas d'égalité, elles ne remporteront rien.
A votre avis, quelle sera la stratégie des deux joueuses ?

Exemple 2.3. (Investissement à deux joueurs) Tim et Mathieu hésitent à investir dans une usine. Cet investissement ne sera rentable que si les deux joueurs décident d'investir. Malheureusement les téléphones portables de Mathieu et de Tim sont tombés en panne, ils ne savent donc pas quelle sera la décision de leur partenaire. Les rétributions sont les suivantes :

- si l'un des deux partenaires investit alors que le second ne le fait pas, l'investisseur perd 50 € alors que celui qui n'a pas investi ne perd rien (mais ne gagne rien non plus) ;
- si personne n'investit, les deux partenaires ne toucheront rien ;
- si les deux partenaires investissent, ils toucheront 150€ chacun.

A votre avis, que devraient faire les deux partenaires ?

Les trois situations décrites ci-dessus sont de natures très diverses. En effet, dans l'exemple 2.1, on cherche à analyser les réactions de deux dangereux criminels, alors que l'exemple 2.2 concerne un petit pari d'argent entre deux amies. Enfin l'exemple 2.3 est lié au monde des affaires.

Cependant, malgré leurs apparentes différences, ces trois situations ont plusieurs points communs. Dans chacune des situations, on voit réapparaître les éléments suivants :

- des acteurs : prisonniers, parieurs, investisseurs.
- chaque acteur doit faire un *choix* parmi différentes possibilités : dénoncer ou se taire ; jouer pierre, papier ou ciseaux ; investir ou ne pas investir. Ces choix se font simultanément et sans que les acteurs aient pu communiquer.
- Une fois les choix faits par tous les acteurs, des *"rémunerations"* de différents types (peine de prison, argent) sont attribuées aux acteurs.

Les acteurs, les choix (simultanés), et les rémunérations sont des éléments communs au trois situations décrites précédemment.

La théorie des jeux est la branche des mathématiques qui propose de décrire ces trois situations dans le language mathématique. Pour cela on a besoin d'une formalisation qui utilise le vocabulaire suivant :

- les acteurs (prisonniers, parieurs, investisseurs) sont appelés des **joueurs**,
- les choix sont appelés les **stratégies**,
- les rémunérations sont appelés les **gains**.

De plus, les stratégies sont choisies en même temps, il n'y a aucune communication entre les différents joueurs. Nous allons maintenant définir formellement cette nouvelle notion.

Définition 2.4. Un **jeu (sous forme stratégique)**, noté G, est la donnée d'un triplet[1] $(N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$ où
- N est un ensemble de joueurs (fini[2] et non-vide[3]).
- Pour tout $k \in N$, A^k est l'ensemble (non vide) des stratégies du joueur k.
- Pour tout $k \in N$, $g^k : A^1 \times .... \times A^n \longmapsto \mathbb{R}$ est la fonction gain du joueur k.

Dans tous les jeux rencontrés dans ce document, nous supposerons que tous les joueurs choisissent leurs stratégies simultanément. Nous supposerons également que tous les joueurs souhaitent maximiser leur fonction de gain.

Remarque 2.5. Dans la suite de ce document, je m'autoriserai les abus de notations suivants : au lieu de noter l'ensemble des joueurs N comme étant $\{\mathbf{C}\text{hristophe}, \mathbf{S}\text{téphanie}\}$, je le noterai $\{\mathbf{C}, \mathbf{S}\}$.

Maintenant, grâce à la définition de jeu sous forme stratégique, nous pouvons formaliser les trois exemples précédents.

Exemple 2.6. Nous allons maintenant décrire formellement le *Dilemme du prisonnier* (Exemple 2.1). Notre but est d'identifier chaque élément du triplet $(N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$ dans le cas précis du *Dilemme du prisonnier*.
- L'ensemble des joueurs N est donné par $\{\mathbf{B}\text{ob}, \mathbf{P}\text{atrick}\}$ (aussi noté $N = \{\mathbf{B}, \mathbf{P}\}$).
- L'ensemble des stratégies de Bob $A^{\mathbf{B}\text{ob}}$ est donné par $\{\text{se } \mathbf{T}\text{aire}, \mathbf{D}\text{énoncer}\}$ (aussi noté $A^{\mathbf{B}} = \{\mathbf{T}, \mathbf{D}\}$). L'ensemble des stratégies de Patrick $A^{\mathbf{P}\text{atrick}}$ est également donné par $\{\text{se } \mathbf{T}\text{aire}, \mathbf{D}\text{énoncer}\}$ (aussi noté $A^{\mathbf{P}} = \{\mathbf{T}, \mathbf{D}\}$).
- La fonction de gain de Bob notée $g^{\mathbf{B}\text{ob}}$ (aussi notée $g^{\mathbf{B}}$) est une fonction de $A^{\mathbf{B}} \times A^{\mathbf{P}}$ dans $\mathbb{R}$. On remarque que l'ensemble $A^{\mathbf{B}} \times A^{\mathbf{P}}$ est composé des quatre éléments suivants : $(\mathbf{T}, \mathbf{T}), (\mathbf{T}, \mathbf{D}), (\mathbf{D}, \mathbf{T}), (\mathbf{D}, \mathbf{D})$. Avec cette notation, la première composante de chaque couple représente une stratégie de Bob alors que la seconde composante représente une

[1] Dans le triplet, $(A^i)_{i\in N}$ (resp. $(g^i)_{i\in N}$) est une notation pour $(A^1, A^2, ..., A^{n-1}, A^n)$ (resp. $(g^1, g^2, ..., g^{n-1}, g^n)$) où n est le nombre d'éléments de N.

[2] E est un ensemble fini s'il existe un nombre naturel n tel que E contient exactement n éléments. Par exemple $\{4, -42, \pi\}$ est un ensemble fini.

[3] E est non-vide si il contient au moins un élément.

stratégie de Patrick. On peut donc définir la fonction $g^{\mathbf{B}}$ explicitement[4] comme suit :

$$g^{\mathbf{B}}((\mathbf{T},\mathbf{T})) = -3 \quad ; \qquad g^{\mathbf{B}}((\mathbf{T},\mathbf{D})) = -10 \quad ;$$
$$g^{\mathbf{B}}((\mathbf{D},\mathbf{T})) = 0 \quad ; \qquad g^{\mathbf{B}}((\mathbf{D},\mathbf{D})) = -5 \quad .$$

On peut définir la fonction de gain de Patrick notée $g^{\mathbf{P}\text{atrick}}$ (aussi notée $g^{\mathbf{P}}$) de la même façon, vu qu'il s'agit également d'une fonction de $A^{\mathbf{B}} \times A^{\mathbf{P}}$ dans $\mathbb{R}$. On obtient alors :

$$g^{\mathbf{P}}((\mathbf{T},\mathbf{T})) = -3 \quad ; \qquad g^{\mathbf{P}}((\mathbf{T},\mathbf{D})) = 0 \quad ;$$
$$g^{\mathbf{P}}((\mathbf{D},\mathbf{T})) = -10 \quad ; \qquad g^{\mathbf{P}}((\mathbf{D},\mathbf{D})) = -5.$$

Rappelons que $g^{\mathbf{B}}((\mathbf{T},\mathbf{T})) = -3 = g^{\mathbf{P}}((\mathbf{T},\mathbf{T}))$ s'interprète par le fait que les deux joueurs obtiendront 3 années de prison s'ils se taisent tous les deux. De la même façon, $g^{\mathbf{B}}((\mathbf{T},\mathbf{D})) = -10$ et $g^{\mathbf{P}}((\mathbf{T},\mathbf{D})) = 0$ traduit le fait que si Bob se tait alors que Patrick choisit de dénoncer son ami, alors Bob fera 10 années de prison alors que Patrick sera libéré.

Remarque 2.7. On peut écrire de manière condensée les fonctions de gain des deux joueurs à l'aide de matrice. Cette notation matricielle (qui sera utilisée dans la suite de ce document) est illustrée ci-dessous dans le cas du *Dilemme du prisonnier* :

$$\begin{array}{cc} & \text{Patrick} \\ & \begin{array}{cc} \quad\mathbf{T} & \qquad\quad \mathbf{D} \end{array} \\ \text{Bob} \begin{array}{c} \mathbf{T} \\ \mathbf{D} \end{array} & \begin{pmatrix} (-3,-3) & (-10,0) \\ (0,-10) & (-5,-5) \end{pmatrix} \end{array}$$

Comment doit-on lire la matrice ? Bob choisit sa stratégie en choisissant une *ligne* de la matrice alors que Patrick choisit sa stratégie à l'aide des *colonnes* de la matrice. Une fois les stratégies des deux joueurs fixées, on a donc un unique élément (a,b) de la matrice. Le gain de Bob est donné par la première composante du couple, i.e. par a alors que celui de Patrick est donné par la seconde composante du couple, i.e. par b. Par exemple, si Bob décide de se taire alors que Patrick choisit de dénoncer son ami, on obtient le couple $(-10,0)$ traduisant le fait que Bob fera 10 années de prison et que Patrick sera libéré.

[4] On remarque que, dans cet exemple, les fonctions de gain ont des valeurs négatives car on cherche à maximiser le gain, mais à minimiser le nombre d'années de prison.

Exemple 2.8. Formalisons maintenant le jeu de *Pierre-Papier-Ciseaux*. Notre but est encore d'identifier chaque élément du triplet $(N,(A^i)_{i\in N},(g^i)_{i\in N})$ dans le cas précis du *Pierre-Papier-Ciseaux*.

- L'ensemble des joueurs N est $\{\mathbf{V}\text{inciane},\mathbf{S}\text{abrina}\}$ (aussi noté $\{\mathbf{V},\mathbf{S}\}$).
- L'ensemble des stratégies de Vinciane $A^{\mathbf{V}\text{inciane}}$ est donné par $\{\mathbf{Pi}\text{erre},\mathbf{Pa}\text{pier},\mathbf{C}\text{iseaux}\}$ (aussi noté $A^{\mathbf{V}}=\{\mathbf{Pa},\mathbf{Pi},\mathbf{C}\ \}$). L'ensemble des stratégies de Sabrina $A^{\mathbf{S}\text{abrina}}$ est le même que celui de Vinciane : $\{\mathbf{Pi}\text{erre},\mathbf{Pa}\text{pier},\mathbf{C}\text{iseaux}\}$ (aussi noté $A^{\mathbf{S}}=\{\mathbf{Pa},\mathbf{Pi},\mathbf{C}\}$).
- La fonction de gain de Vinciane $g^{\mathbf{V}\text{inciane}}$ (aussi notée $g^{\mathbf{V}}$) est une fonction de $A^{\mathbf{V}}\times A^{\mathbf{S}}$ dans $\mathbb{R}$. On remarque que l'ensemble $A^{\mathbf{V}}\times A^{\mathbf{S}}$ est composé des éléments suivants : $(\mathbf{Pi},\mathbf{Pi}),(\mathbf{Pi},\mathbf{Pa}),(\mathbf{Pi},\mathbf{C}),(\mathbf{Pa},\mathbf{Pi}),(\mathbf{Pa},\mathbf{Pa})$, $(\mathbf{Pa},\mathbf{C}),(\mathbf{C},\mathbf{Pi}),(\mathbf{C},\mathbf{Pa})(\mathbf{C},\mathbf{C})$. Comme précédemment, la première composante de chaque couple représente une stratégie de Vinciane alors que la seconde composante représente une stratégie de Sabrina. On peut donc définir la fonction $A^{\mathbf{V}}$ explicitement comme suit :

$$\begin{array}{lll} g^{\mathbf{V}}((\mathbf{Pi},\mathbf{Pi}))=0 \quad ; & g^{\mathbf{V}}((\mathbf{Pi},\mathbf{Pa}))=-1 & ;\ g^{\mathbf{V}}((\mathbf{Pi},\mathbf{C}))=1 \quad ; \\ g^{\mathbf{V}}((\mathbf{Pa},\mathbf{Pi}))=1 \quad ; & g^{\mathbf{V}}((\mathbf{Pa},\mathbf{Pa}))=0 & ;\ g^{\mathbf{V}}((\mathbf{Pa},\mathbf{C}))=-1 \quad ; \\ g^{\mathbf{V}}((\mathbf{C},\mathbf{Pi}))=1 \quad ; & g^{\mathbf{V}}((\mathbf{C},\mathbf{Pa}))=-1 & ;\ g^{\mathbf{V}}((\mathbf{C},\mathbf{C}))=0 \quad . \end{array}$$

  On peut définir la fonction de gain de Sabrina notée $g^{\mathbf{S}\text{abrina}}$ (aussi notée $g^{\mathbf{S}}$) de la même façon, vu qu'il s'agit également d'une fonction de $A^{\mathbf{V}}\times A^{\mathbf{S}}$ dans $\mathbb{R}$. On obtient alors :

$$\begin{array}{lll} g^{\mathbf{S}}((\mathbf{Pi},\mathbf{Pi}))=0 \quad ; & g^{\mathbf{S}}((\mathbf{Pi},\mathbf{Pa}))=-1 & ;\ g^{\mathbf{S}}((\mathbf{Pi},\mathbf{C}))=1 \quad ; \\ g^{\mathbf{S}}((\mathbf{Pa},\mathbf{Pi}))=1 \quad ; & g^{\mathbf{S}}((\mathbf{Pa},\mathbf{Pa}))=0 & ;\ g^{\mathbf{S}}((\mathbf{Pa},\mathbf{C}))=-1 \quad ; \\ g^{\mathbf{S}}((\mathbf{C},\mathbf{Pi}))=1 \quad ; & g^{\mathbf{S}}((\mathbf{C},\mathbf{Pa}))=-1 & ;\ g^{\mathbf{S}}((\mathbf{C},\mathbf{C}))=0 \quad . \end{array}$$

Ce qui nous donne la matrice suivante :

$$\begin{array}{cc} & \text{Sabrina} \\ & \begin{array}{ccc} \mathbf{Pi} & \mathbf{Pa} & \mathbf{C} \end{array} \\ \text{Vinciane}\ \begin{array}{c} \mathbf{Pi} \\ \mathbf{Pa} \\ \mathbf{C} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0) & (-1,1) & (1,-1) \\ (1,-1) & (0,0) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 2.9. Il nous reste à formaliser le *jeu d'investissement* (Exemple 2.3).

- L'ensemble des joueurs N est $\{\mathbf{T}\text{im},\mathbf{M}\text{athieu}\}$ (aussi noté $\{\mathbf{T},\mathbf{M}\}$).

- L'ensemble des stratégies de Tim $A^{\mathbf{T}\mathrm{im}}$ est donné par $\{\mathbf{I}\text{nvestir}, \mathbf{N}\text{e pas investir}\}$ (aussi noté $A^{\mathbf{T}} = \{\mathbf{I}, \mathbf{N}\}$). L'ensemble des stratégies de Mathieu $A^{\mathbf{M}\mathrm{athieu}}$ est également donné par $\{\mathbf{I}\text{nvestir}, \mathbf{N}\text{e pas investir}\}$ (aussi noté $A^{\mathbf{M}} = \{\mathbf{I}, \mathbf{N}\}$).
- La fonction de gain de Tim $g^{\mathbf{T}\mathrm{im}}$ (aussi notée $g^{\mathbf{T}}$) est une fonction de $A^{\mathbf{T}} \times A^{\mathbf{M}}$ dans $\mathbb{R}$. On remarque que l'ensemble $A^{\mathbf{T}} \times A^{\mathbf{M}}$ est composé des éléments suivants : $(\mathbf{I},\mathbf{I}), (\mathbf{I},\mathbf{N}), (\mathbf{N},\mathbf{I}), (\mathbf{N},\mathbf{N})$. La première composante de chaque couple représente une stratégie de Tim alors que la seconde composante représente une stratégie de Mathieu. On peut donc définir la fonction $A^{\mathbf{T}}$ explicitement comme suit :

$$\begin{array}{ll} g^{\mathbf{T}}((\mathbf{I},\mathbf{I})) = 150 \quad ; & g^{\mathbf{T}}((\mathbf{I},\mathbf{N})) = -50 \quad ; \\ g^{\mathbf{T}}((\mathbf{N},\mathbf{I})) = 0 \quad ; & g^{\mathbf{T}}((\mathbf{N},\mathbf{N})) = 0 \quad . \end{array}$$

  On peut définir la fonction de gain de Mathieu $g^{\mathbf{M}\mathrm{athieu}}$ (aussi notée $g^{\mathbf{M}}$) de la même façon, vu qu'il s'agit également d'une fonction de $A^{\mathbf{T}} \times A^{\mathbf{M}}$ dans $\mathbb{R}$. On obtient alors :

$$\begin{array}{ll} g^{\mathbf{M}}((\mathbf{I},\mathbf{I})) = 150 \quad ; & g^{\mathbf{M}}((\mathbf{I},\mathbf{N})) = 0 \quad ; \\ g^{\mathbf{M}}((\mathbf{N},\mathbf{I})) = -50 \quad ; & g^{\mathbf{M}}((\mathbf{N},\mathbf{N})) = 0 \quad . \end{array}$$

Ce qui nous donne la matrice suivante :

$$\begin{array}{cc} & \text{Mathieu} \\ & \begin{array}{cc} \quad\mathbf{I} & \qquad\mathbf{N} \end{array} \\ \text{Tim} \begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{N} \end{array} & \begin{pmatrix} (150,150) & (-50,0) \\ (0,-50) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Nous vous proposons ci-dessous des exercices qui vous permettront de vous familiariser avec toutes les notions qui vienent d'être introduites.

Exercice 2.10. Christophe et Christian décident de jouer à pierre-papier-ciseaux, le gagnant gagne 1€ et le perdant devra ranger le bureau de Christian qui est un peu en désordre (on peut symboliser le rangement par une perte de 500€). Formalisez cette situation à l'aide d'un jeu sous-forme stratégique.

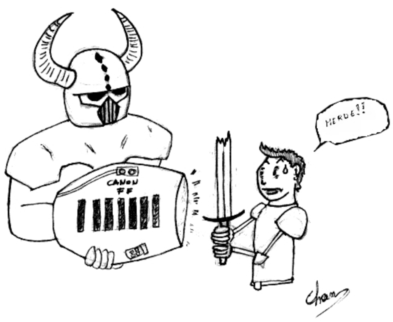
Exercice 2.11. Une équipe de football doit désigner un capitaine pour le match. Un joueur propose ceci : "Chaque joueur doit noter sur un morceau de papier un nombre compris entre 1 et 100. La moyenne des nombres proposés sera calculée et le joueur dont le nombre proposé est le plus proche de la moyenne devient le capitaine. Dans le cas d'une égalité, c'est le joueur avec le numéro de maillot le plus bas qui gagne." Formalisez cette situation à l'aide d'un jeu sous-forme stratégique.

Exercice 2.12. Mathieu et Thibaud se disputent un gâteau. Rémy decide de mettre un terme à cette dispute et propose le petit jeu suivant : les joueurs devront choisir une couleur entre le rouge et le noir et devront la noter sur un morceau de papier puis ils le donneront à Rémy qui regardera qui a gagné. Si les deux couleurs sont identiques Thibaud gagne, sinon c'est Mathieu qui gagne. Formalisez cette situation à l'aide d'un jeu sous-forme stratégique.

3 Stratégie strictement dominée

En théorie des jeux, on suppose naturellement que chaque joueur est rationnel, c'est-à-dire que chaque joueur cherche à maximiser son gain. Illustrons cette idée à travers un exemple :

Exemple 3.1. David et Mickael se sont lancés dans un duel à mort. La cause de ce duel est assez mystérieuse... Ils ont chacun le choix entre deux armes : le pistolet ou le bazooka. Le pourcentage de chance de succès dans ce duel est fonction du choix des armes :



Aïe, ça va faire mal...

- si les deux duellistes choisissent le pistolet, David a 20 pour cent de chance de tuer Mickael, alors que Mickael n'a que 18 pour cent de chance de tuer David. Nos deux adversaires sont en fait d'assez mauvais tireurs, même si David est légèrement meilleur ;
- si les deux joueurs choisissent le bazooka, ils abattront leur adversaire dans 80 pour cent des cas. Pas besoin d'être un bon tireur pour utiliser un bazooka ;
- si les deux adversaires choisissent des armes différentes, le détenteur du bazooka se sent plus en confiance alors que le malheureux possesseur du

> pistolet prend peur. Ces considérations psychologiques influencent les habilités à tuer de nos deux tireurs : le détenteur du bazooka a maintenant encore plus de chance de remporter le duel sur son adversaire, il atteindra sa cible dans 90 pour cent de cas, alors que le possesseur du pistolet (que ce soit David ou Mickael), tétanisé, ne touchera mortellement son adversaire que dans 10 pour cent des cas.

Voici la matrice des gains où **P** symbolise le **P**istolet et **B** symbolise le **B**azooka :

$$\begin{array}{cc} & \text{Mickael} \\ & \begin{array}{cc} \quad\mathbf{P} & \qquad\mathbf{B} \end{array} \\ \text{David} \begin{array}{c} \mathbf{P} \\ \mathbf{B} \end{array} & \begin{pmatrix} (20,18) & (10,90) \\ (90,10) & (80,80) \end{pmatrix} \end{array}$$

Dans ce duel, aussi stupide soit-il, il semble bien plus raisonnable, pour David comme pour Mickael, de choisir le bazooka. En effet, le choix du bazooka offre une plus grande chance de toucher son adversaire, quoi que ce dernier ait décidé de faire. On parlera d'un *choix rationnel*[5] (un choix irrationnel serait de choisir un pistolet).

Donc dans l'exemple du duel, on voit que si chaque joueur agit rationnellement, le couple de stratégies choisies par nos deux adversaires sera $(Bazooka, Bazooka)$. On appellera ce couple l'issue rationnelle du jeu.

Retour au dilemme du prisonnier Maintenant nous allons voir comment cette idée d'issue rationnelle va permettre de résoudre le dilemme du prisonnier de l'Exemple 2.1. Pour ce faire, nous rappelons la matrice des gains associée à ce jeu :

$$\begin{array}{cc} & \mathbf{P}\text{atrick} \\ & \begin{array}{cc} \quad\mathbf{T} & \qquad\mathbf{D} \end{array} \\ \mathbf{B}\text{ob} \begin{array}{c} \mathbf{T} \\ \mathbf{D} \end{array} & \begin{pmatrix} (-3,-3) & (-10,0) \\ (0,-10) & (-5,-5) \end{pmatrix} \end{array}$$

Pour comprendre ce qu'il pourrait se passer, mettons nous dans la peau de Bob l'éponge :

[5]Nous sommes bien conscients qu'il est paradoxal de parler de choix rationnel dans le cas de deux allumés qui se sont lancés un duel au bazooka pour une raison mystérieuse. C'est néanmoins le vocabulaire propre à la théorie des jeux.

- *Bob* se dit que *Patrick* est son meilleur ami, il n'a pas envie de le trahir. De plus, il pense que *Patrick* ne le trahira jamais. Donc il décide de se taire. Dans cette situation, les deux amis totalisent une peine cumulée de 6 ans de prison ; ce qui n'est pas si mal.
- Cependant après quelques longues minutes de réflexion *Bob* se rend compte que s'il dénonce *Patrick* alors que celui ci ne le dénonce pas, il pourra rentrer immédiatement chez lui, pour nourrir *Gary*, son escargot de compagnie. Son choix sera donc maintenant de dénoncer *Patrick*.
- *Bob* réalise alors que *Patrick* a très probablement fait le même raisonnement[6] de son côté. En effet, *Patrick* va certainement vouloir dénoncer *Bob* dans le but d'être libéré immédiatement pour aller acheter des oranges à *Bob*. Mais quel casse-tête ! ! ! *Bob* doit maintenant envisager que *Patrick* va sans doute le dénoncer (dans le but de lui offrir des oranges), Que doit-il faire ? Dans ce cas aussi, il semble plus raisonnable de dénoncer *Patrick* dans le but d'écourter son séjour en prison. Donc dans les deux cas *Bob* devra dénoncer *Patrick*.

Un raisonement analogue peut être fait en se plaçant dans la tête de *Patrick*, on arrive alors à la conclusion que *Patrick* dénoncera toujours *Bob*. En résumé, le choix rationnel de *Bob* et *Patrick* sera de dénoncer.

Ce qu'on peut montrer un peu plus formellement, c'est que *Bob* doit dénoncer *Patrick* car il fera moins d'années de prison peu importe la stratégie *Patrick* : si *Patrick* choisit de se taire, *Bob* a intérêt à dénoncer car d'un gain de -3, il passera à un gain de 0. Si *Patrick* choisit de dénoncer *Bob*, *Bob* a intérêt à dénoncer aussi car d'un gain de -10, il passera à un gain de -5. Donc dans les deux cas *Bob* a intérêt à le **dénoncer**.

On dira alors que la stratégie "se taire" est une stratégie **strictement dominée** car il existe une stratégie qui permet de gagner plus, quelle que soit la stratégie de mon adversaire. Cette notion est formalisée ci-dessous dans le cas d'un jeu à deux joueurs.

Définition 3.2. Soit $G = (N,(A^i)_{i\in N},(g^i)_{i\in N})$ un jeu (sous forme stratégique) à deux joueurs, $a^1 \in A^1$ une stratégie du joueur 1 et $a^2 \in A^2$ une stratégie du joueur 2. On dira que a^1 est une stratégie strictement dominée pour le joueur 1 si et seulement

$$\exists b^1 \in A^1,\ b^1 \neq a^1, \forall a^2 \in A^2 \quad g^1(b^1,a^2) > g^1(a^1,a^2).$$

De la même façon, on dira que a^2 est une stratégie strictement dominée pour le joueur 2 si et seulement si

$$\exists b^2 \in A^2,\ b^2 \neq a^2, \forall a^1 \in A^1 \quad g^2(a^1,b^2) > g^2(a^1,a^2).$$

[6] Il n'y a aucune raison de penser que *Patrick* est moins malin que *Bob*.

Exercice 3.3. Nous laissons le soin au lecteur d'écrire la définition pour n joueurs.

Remarque 3.4. Un joueur rationnel ne jouera jamais une stratégie **strictement dominée**.

Nous allons maitenant trouver les stratégies strictement dominées du dilemme du prisonnier à l'aide de la définition. On va montrer que la stratégie "*se taire*" est une stratégie **strictement dominée**, d'après la définition :

$$\exists b^{\mathbf{B}ob} \in A^{\mathbf{B}ob}\ , \forall a^{\mathbf{P}atrick} \in A^{\mathbf{P}atrick} \quad g^{\mathbf{B}ob}(b^{\mathbf{B}}, a^{\mathbf{P}}) > g^{\mathbf{B}ob}(a^{\mathbf{B}}, a^{\mathbf{P}})$$

Donc si "*se taire*" est une stratégie **strictement dominée**, elle doit être dominée par "*dénoncer*" car c'est la seule autre possibilité. Par la Définition 3.2 on doit vérifier :

$$\begin{cases} g^{\mathbf{B}ob}(\mathbf{D},\mathbf{D}) > g^{\mathbf{B}ob}(\mathbf{T},\mathbf{D}) \\ \qquad\qquad \textbf{et} \\ g^{\mathbf{B}ob}(\mathbf{D},\mathbf{T}) > g^{\mathbf{B}ob}(\mathbf{T},\mathbf{T}) \end{cases}$$

En remplaçant chaque gain par sa valeur, on a bien que "*se taire*" est une stratégie **strictement dominée** pour Bob. On peut en déduire, par rationalité, qu'aucun des deux joueurs ne jouera la stratégie "*se taire*".

Retour aux jeux de pierre-papier-ciseaux et d'investissement. Comme nous l'avons fait pour le dilemme du prisonnier, nous allons utiliser la définition de stratégie strictement dominée pour essayer de déterminer les issues rationnelles des jeux d'investissement (Exemple 2.3) et de pierre-papier-ciseaux (Exemple 2.2).

Dans le jeu d'investissement (Exemple 2.3), Tim et Mathieu devaient choisir entre investir dans une compagnie ou ne pas investir. La matrice des gains était la suivante :

$$\begin{array}{cc} & \text{Mathieu} \\ & \begin{array}{cc} \quad\mathbf{I} & \qquad\mathbf{N} \end{array} \\ \text{Tim} \begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{N} \end{array} & \begin{pmatrix} (150,150) & (-50,0) \\ (0,-50) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

On remarque qu'il n'y a pas de stratégie strictement dominée. En effet si la stratégie **I** était strictement dominée pour Tim (idem pour Mathieu) on aurait grâce à la définition :

$$\begin{cases} g^{Tim}(\mathbf{I},\mathbf{I}) > g^{Tim}(\mathbf{N},\mathbf{I}) & \text{c'est-à-dire } 150 > 50 \quad \text{et} \\ g^{Tim}(\mathbf{I},\mathbf{N}) > g^{Tim}(\mathbf{N},\mathbf{N}) & \text{c'est-à-dire } -50 > 0 \end{cases}$$

La première inégalité est verifiée mais pas la deuxième. On peut montrer de la même façon que N n'est pas strictement dominée pour Tim. Un raisonnement analogue s'applique à Mathieu.
En conclusion, la notion de stratégie strictement dominée ne nous permet d'exclure aucun comportement du jeu d'investissement. On peut montrer de la même manière que l'Exemple 2.2 n'a pas de stratégie strictement dominée. Comme nous l'avons dit au début du chapitre, nous voulons déterminer les issues rationnelles des différents jeux. Or ici la définition de stratégie strictement dominée ne suffit pas. Il nous faut donc une nouvelle définition plus performante. Celle-ci sera présentée au chapitre suivant avec les équilibres de Nash. Nous terminons ce chapitre avec quelques exercices.

Exercice 3.5. (Le jeu des courses au supermarché) Morgane et Anaïs doivent aller faire des courses car il ne reste plus rien dans leur réfrigérateur. Morgane voudrait acheter des pommes, des poires, des scoubidous et une figurine action man à l'effigie de Chuck Norris. Anaïs voudrait un nouveau pull pour Louise, un barbecue, un équipement de curling et une figurine action man à l'effigie de Chuck Norris. Malheureusement on est vendredi, le supermarché Tarrefour est rempli de clients. De plus Anaïs est de bonne humeur et elle souhaite voir Morgane. Elles se donnent donc rendez-vous au supermarché soit au matin, après midi ou au soir. Mais il y a quelques contraintes :

- Anaïs déteste se lever tôt et Morgane déteste faire les courses l'après midi ;
- Si Anaïs ne rencontre pas Morgane au supermarché, elle lui téléphonera pour lui demander si elle a besoin de quelque chose(idem si Morgane ne rencontre pas Anaïs) et ne sera pas obligée de se déplacer ;
- Si Anaïs décide de se déplacer le soir, elle fera une sieste l'après midi ;
- Il n'y a aucune communication qui pourrait influencer leur choix.

Modélisez cette situation à l'aide d'un jeu sous forme stratégique et trouvez l'issue rationnelle de ce jeu.

Remarque 3.6. Vous vous demandez certainement comment construire la matrice des gains alors que dans l'énoncé, il n'y a aucune valeur. En fait on estime les gains comme lorqu'on estime un objet : on le compare à d'autres objets. Si notre objet est mieux que les autres, on monte sa valeur, sinon on le baisse. Prenons comme exemple les gains d'Anaïs quand elle choisit de se lever tôt :

- comme elle n'aime pas se lever tôt, les gains devront être inférieurs aux gains quand elle ne se lève pas tôt ;

- ensuite si elle rencontre Morgane, elle sera contente, cela ce produit quand Morgane y va aussi le matin.

Donc on a que les gains quand Anaïs se lève tôt doivent non-seulement être inférieurs aux autre gains et lorque Morgane se lève tôt aussi, le gain d'Anaïs doit être plus élevé que ceux quand Morgane ne se lève pas tôt. La construction de la matrice n'est évidemment pas unique. Voici une représentation de la matrice des gains (ou matrice de satisfaction). **M** représente le matin, **A** l'après midi et **S** le soir.

$$\begin{array}{cc} & \text{Anaïs} \\ & \begin{array}{ccc} \quad\mathbf{M} & \quad\mathbf{A} & \quad\mathbf{S} \end{array} \\ \text{Morgane} \begin{array}{c} \mathbf{M} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} (5,2) & (3,4) & (3,6) \\ (2,1) & (3,5) & (2,4) \\ (4,1) & (4,5) & (6,6) \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 3.7. (**Tom et Jerry**) Jerry, la petite souris, est dans un mur du salon à l'abri du chat Tom qui dort dans son panier à l'étage. Il est quatre heures et Jerry a faim. Elle veut aller chercher du fromage dans la cuisine mais elle hésite à sortir. Tom quant à lui, est bien au chaud dans son panier et n'a pas trop envie de sortir sauf si c'est pour attraper Jerry. De plus ils sont trop éloignés pour se voir. Donc si Jerry sort et que Tom ne va pas à la cuisine, il ne sortira pas de son panier. On a quatre situations possibles :

- Jerry et Tom vont à la cuisine, Jerry passe un mauvais moment et Tom est très content.
- Tom va à la cuisine et Jerry reste dans le mur, Jerry est contente car elle ne s'est pas fait attraper et Tom est furieux car il va se faire gronder par sa maîtresse.
- Jerry va à la cuisine et Tom reste à l'étage, Jerry est super contente et Tom s'en fou car il dort.
- Tom reste dans son panier et Jerry reste dans le mur, Jerry a toujours faim et Tom s'en fou, il dort.

Modélisez cette situation à l'aide d'un jeu sous forme stratégique et trouvez l'issue rationnelle de ce jeu.

Exercice 3.8. (La fureur de vivre) Deux adolescents en voiture foncent l'un vers l'autre dans un chemin étroit, pour les beaux yeux de la serveuse Florine. Personne ne veut sortir du chemin par peur d'être déshonoré. Si les deux sortent de la route, aucun n'est vraiment satisfait, ni mécontent. Les choix sont S (sortir de la route) ou F (foncer).

- Si ils ne sortent pas du chemin, ils se percuteront.

- Si un des deux dévie, celui qui a dévié devra quitter la ville, tandis que l'autre sortira avec Florine.
- Si les deux sortent du chemin, ils devront manger des piments pendant une semaine.

Modélisez cette situation à l'aide d'un jeu sous forme stratégique et trouvez l'issue rationnelle de ce jeu.

Exercice 3.9. Une équipe de foot doit désigner un capitaine pour le match. Un joueur propose ceci : "chaque joueur doit noter sur un morceau de papier un chiffre compris entre 1 et 100 ensuite ensuite on fait la moyenne et le plus proche de la moyenne devient le capitaine. Dans le cas d'une égalité c'est le joueur avec le numéro de maillot le plus bas qui gagne".
Trouvez l'issue rationnelle de ce jeu.

4 Equilibre de Nash

Comme nous l'avons vu précédemment, les statégies strictement dominées ne suffisent pas toujours à déterminer les issues rationnelles des jeux. On cherche donc une nouvelle notion permettant de prédire les issues rationnelles. Pour ce faire, nous allons considérer à nouveau l'histoire d'investissement de Tim et Mathieu.

Exemple 4.1. Dans l'Exemple 2.3, Tim et Mathieu voulaient investir dans une entreprise mais suite à quelques problèmes, l'un ne savait pas si l'autre allait investir dans l'entreprise. Les gains de ce jeu sont donnés par la matrice suivante :

$$\begin{array}{cc} & \text{Mathieu} \\ & \begin{array}{cc} \quad\mathbf{I} & \qquad\mathbf{N} \end{array} \\ \text{Tim} \begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{N} \end{array} & \begin{pmatrix} (150,150) & (-50,0) \\ (0,-50) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Plaçons nous dans la peau de Tim. On sait déjà que Tim n'a pas de stratégie strictement dominée. Tim se dit que Mathieu à deux choix possibles : Investir ou Ne pas investir.

- Si Mathieu choisit d'investir, Tim aura le choix entre ne pas investir ou investir. Mais dans ce cas, son meilleur choix est d'investir. En effet, si il choisit de ne pas investir il passera à côté de 150€. La meilleure stratégie sera donc d'investir quand Mathieu investit.
- Si maintenant Mathieu décide de ne pas investir, alors Tim n'investira pas non plus car sinon, comme il sera le seul investisseur et il perdra 50€. Donc sa meilleure réponse face à la stratégie de Mathieu qui est ne

pas investir, sera de ne pas investir. On a le même raisonnement pour Mathieu à savoir que si Tim investit, il doit investir et si Tim n'investit pas, Mathieu choisira de ne pas investir.

On remarque donc que le meilleur choix de Tim dépend du contexte ; c'est-à-dire de la stratégie de Mathieu. Nous allons maintenant définir formellement ce qu'est une meilleure réponse.

Définition 4.2. Soit $G = (N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$ un jeu (sous forme stratégique) à deux joueurs, $a^1 \in A^1$ une stratégie du joueur 1. On dit que a^1 est **une**[7] meilleure réponse du joueur 1 face à a^2, la stratégie du joueur 2, si et seulement si

$$\forall b^1 \in A^1, g^1(a^1, a^2) \geq g^1(b^1, a^2)$$

En d'autres mots, a^1 est une stratégie qui maximise la fonction de gain du joueur 1 quand il sait que son adversaire joue a^2, c'est-à-dire $g^1(a^1, a^2) = \max\{g^1(x, a^2) \mid x \in A^1\}$.
De même, a^2 est la meilleure réponse du joueur 2 face à a^1, la stratégie du joueur 1, si et seulement si

$$\forall b^2 \in A^2, g^2(a^1, a^2) \geq g^2(a^1, b^2)$$

En d'autres mots, a^2 est une stratégie qui maximise la fonction de gain du joueur 2 quand il sait que son adversaire joue a^1, c'est-à-dire $g^2(a^1, a^2) = \max\{g^2(a^1, y) | y \in A^2\}$

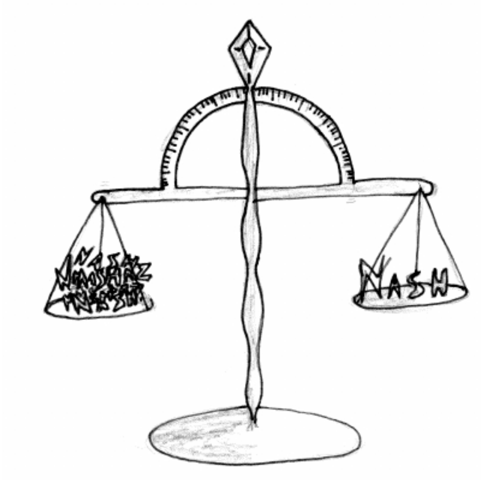
Meilleures réponses du jeu d'investissement. Pour nous familiariser avec la définition de meilleure réponse, revenons sur l'exemple précédent : quelle est une meilleure réponse possible de Mathieu face à la stratégie **Investir** de Tim ? Mathieu a le choix entre **Investir** et **Ne pas investir**. Prenons **Investir** et regardons si c'est une meilleure réponse. On cherche $a^2 \in A^2 = \{I, N\}$ tel que $g^2(I, a^2) = \max\{g^2(\mathbf{I}, a^2) \mid y \in A^2\} = \max\{g^2(I, I), g^2(I, N)\} = \max\{150, -50\}$

$$\text{soit } g^2(\mathbf{I}, \mathbf{I}) \geq g^2(\mathbf{I}, \mathbf{N}) \text{ c'est-à-dire } 150 > 0.$$

Nous venons donc de montrer formellement que pour Mathieu, **Investir** est une meilleure réponse face à la stratégie **Investir** de Timothée. On peut se convaincre (par des arguments similaires) que la stratégie **Investir** est aussi une meilleure réponse de Tim face à la stratégie **Investir** de Mathieu.

[7] Face à une stratégie donnée a^2, il existe potentiellement plusieurs meilleures réponses.

Pour aller plus loin, nous pouvons nous demander si dans un jeu, il existe une situation (a_1,a_2) telle que a_1 est une meilleure réponse face à a^2 et a^2 est une meilleure réponse face à a^1. Une telle situation garantirait qu'aucun des deux joueurs n'ait envie d'en changer. En d'autres termes, on cherche un profil de stratégies[8] tel que chaque joueur aura maximisé ses gains face à la stratégie de son adversaire. Par exemple, dans le jeu d'investissement, prenons le profil $(\mathbf{I},\mathbf{I})$. Grâce à ce qui a été dit ci-dessus, nous savons que le profil $(\mathbf{I},\mathbf{I})$ possède la propriété recherchée c'est-à-dire **I** est une meilleure réponse de Tim face à Mathieu et vice versa. Nous venons donc de trouver un profil de stratégie dans lequel chaque joueur maximise ses gains compte tenu de la stratégie de son adversaire. Un contre exemple à ce phénomène serait $(\mathbf{N},\mathbf{I})$. En effet, dans le profil $(\mathbf{N},\mathbf{I})$, Tim n'a pas maximisé ses gains face à la stratégie **I** de Mathieu ; sa meilleure réponse face à la stratégie **I** de Mathieu aurait été de jouer **I** plutôt que **N**. Cette idée est à la base de la célèbre notion d'**équilibre de Nash**.



Définition 4.3. Soit $G = (N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$ un jeu (sous forme stratégique) à deux joueurs, $(a^1,a^2) \in A^1 \times A^2$ un profil de stratégies. On dira que (a^1,a^2) est un **équilibre de Nash** si et seulement si

a^1 est la meilleure réponse face à a^2 **et** a^2 est la meilleure réponse face à a^1.

En d'autres mots, un équilibre de Nash est un profil de stratégies (a^1,a^2) où chaque joueur a maximisé son gain face à la stratégie de son adversaire.

Exercice 4.4. Ici aussi, nous laissons le soin au lecteur d'écrire la définition pour n joueurs.

[8] Lorsque, lors d'un jeu à n joueurs, chaque joueur fixe sa stratégie, l'ensemble des stratégies noté $(a^1,a^2,\cdots,a^n)$ est appelé un **profil de stratégies**.

Notation : On notera $a^1 \in \mathrm{MR}^1(a^2)$ pour symboliser le fait que a^1 est la meilleure réponse du joueur 1 face à la stratégie a^2 du joueur 2, .

Equilibres de Nash du jeu d'investissement. Dans l'exemple du jeu d'investissement (Exemple 2.3), on a deux équilibres de Nash : $(\mathbf{I},\mathbf{I})$ et $(\mathbf{N},\mathbf{N})$. On a montré précédemment que $\mathbf{I}$ était une meilleure réponse de Tim (resp. de Mathieu) face à la stratégie adverse $\mathbf{I}$. On peut montrer, de la même façon, que $(\mathbf{N},\mathbf{N})$ est un équilibre de Nash.

On peut également vérifier que $(\mathbf{N},\mathbf{I})$ n'est pas un équilibre de Nash, c'est-à-dire $\mathbf{N} \notin \mathrm{MR}^{\mathrm{Tim}}(\mathbf{I})$ ou $\mathbf{I} \notin \mathrm{MR}^{\mathrm{Mathieu}}(\mathbf{N})$. Pour cela, il suffit de montrer que :

$$\begin{cases} \mathbf{I} \in A^T & g^T(\mathbf{I},\mathbf{I}) \leq g^T(\mathbf{N},\mathbf{I}) \quad \text{c'est-à-dire } 150 < -50 \quad \textit{ou} \\ \mathbf{N} \in A^M & g^M(\mathbf{N},\mathbf{N}) \leq g^M(\mathbf{N},\mathbf{I}) \quad \text{c'est-à-dire } 0 < -50 \end{cases}$$

Les deux conditions ne sont pas respectées, il faut au moins une condition non respectée pour que le profil de stratégies ne soit pas un équilibre de Nash. Donc $(\mathbf{N},\mathbf{I})$ n'est pas un équilibre de Nash. Un raisonnement analogue pourra convaincre que $(\mathbf{I},\mathbf{N})$ n'est pas un équilibre de Nash.

Nous allons maintenant étudier l'existence d'équilibre(s) de Nash dans un autre exemple célèbre issu de l'économie.

Exemple 4.5. Duopole de Cournot : deux entreprises, Cony et Pintendo, produisent toutes les deux des ordinateurs. Ces deux entreprises vont prochainement lancer sur le marché une nouveau type d'ordinateur, mais elles ne savent pas combien elles doivent en produire pour optimiser leur profit. On sait que le profit d'une entreprise dépend non seulement de la production de celle-ci, mais aussi de la production de la concurrence. En effet, le benéfice/gain de l'entreprise est donné par la fonction suivante :

$$g^i(a^1,a^2) = a^i(2-(a^1+a^2)) - a^i$$

Il est important de préciser que, dans ce jeu, chaque entreprise peut produire une quantité allant de 0 à $+\infty$. Notre but est de déterminer les éventuels équilibres de Nash. Dans un premier temps, modélisons cette situation à l'aide d'un jeu sous forme stratégique :

- $N = \{Cony, Pintendo\}$, nous simplifierons en $\{1,2\}$;
- les stratégies $A^1 = A^2 = \mathbb{R}^+$;
- le gain du joueur 1 sera donné par :

  $$g^1(x,y) = x(2-(x+y)) - x,$$

  où $x \in \mathbb{R}^+$ (resp. $y \in \mathbb{R}^+$) représente la production du joueur 1 (resp. du joueur 2). Avec la même notation, le gain du joueur 2 sera donné par :

  $$g^2(x,y) = y(2-(x+y)) - y.$$

Pour déterminer les éventuels équilibres de Nash, nous allons utiliser la notion de meilleure réponse. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^+$ une stratégie de l'adversaire du joueur 2, regardons la meilleure réponse du joueur 1 face à y_0. la fonction se récrit :

$$g^1(x, y_0) = -x^2 + x \cdot (1 - y_0)$$

Traçons g^1 en faisant varier y_0 :

Fig. 1: La fonction de gain du joueur 1 avec divers y_0 fixés.

On remarque que :

1. le graphe de la fonction est celui d'une parabole,
2. les racines de la parabole sont 0 et $1 - y_0$ (les calculs sont laissés au lecteur),
3. la concavité de la parabole est tournée vers le bas, et le maximum de la fonction est atteint en $\frac{1-y_0}{2}$ (les calculs sont laissés au lecteur).

Si $y_0 \leq 1$, la valeur $\frac{1-y_0}{2}$ est positive et peut donc représenter une quantité de production du joueur 1. Dans ce cas, une meilleure réponse du joueur 1 face à y_0 est de produire $\frac{1-y_0}{2}$ car la fonction atteint son maximum en ce point et donc, par définition du maximum, elle vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g^1(x, y_0) \leq g^1\left(\frac{1-y_0}{2}, y_0\right).$$

Donc $\frac{1-y_0}{2}$ est bien une meilleure réponse du joueur 1 face à y_0.

Dans le cas où $y_0 > 1$, la valeur $\frac{1-y_0}{2}$ (qui maximise la parabole) est strictement négative et ne représente donc plus une quantité de production du joueur 1. De plus, le graphe de la fonction de droite sur la Fig. 1 nous montre que, dans ce cas, la production du joueur 1 est toujours négative. La meilleure réponse possible est donc de ne rien produire, c'est-à-dire de jouer 0.

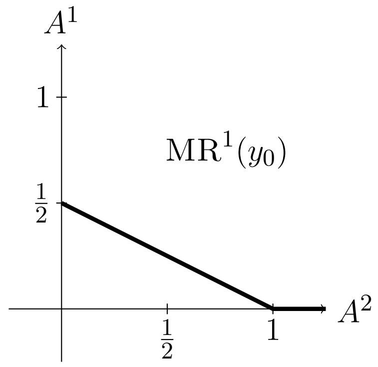
En résumé, nous obtenons les conditions suivantes pour trouver la meilleure réponse du joueur 1 :

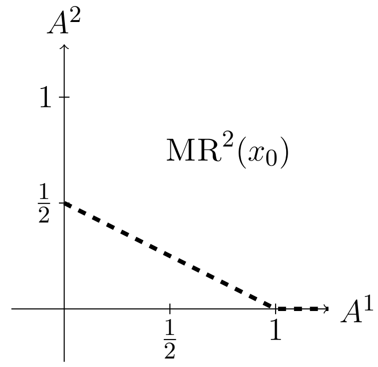
$$\mathrm{MR}^1(y_0) = \begin{cases} \frac{1-y_0}{2} & \text{Si } y_0 < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a le même raisonnement pour le joueur 2, ce qui nous donne les conditions suivantes :

$$\mathrm{MR}^2(x_0) = \begin{cases} \frac{1-x_0}{2} & \text{Si } x_0 < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

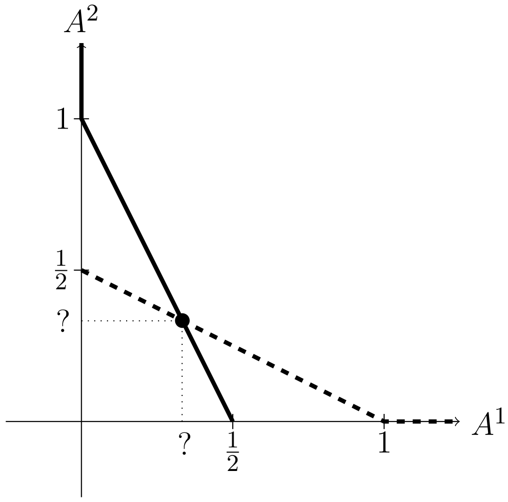
A partir les conditions ci-dessus, on peut tracer le graphique de meilleure réponse de chaque joueur. Voici les graphiques de la meilleure réponse du joueur 1 (à gauche) et du joueur 2 (à droite).





Maintenant que nous avons les deux graphes de meilleure réponse, on peut trouver les équilibres de Nash c'est-à-dire, ici, les couples (a^1, a^2) tels que (a^1, a^2) appartient à la fois au graphe de meilleure réponse du joueur 1 et au graphe de meilleure réponse du joueur 2. En superposant[9] les deux graphes, on obtient le dessin suivant :

[9]Nous allons tracer les graphes de meilleures réponses des joueurs sur un même graphique, en prenant garde que la meilleure réponse du joueur 1 va de A^2 dans A^1 et que la meilleur réponse du joueur 2 va de A^1 dans A^2.



Nous avons donc, par calcul :

$$\begin{cases} \frac{1-y}{2} = x & (1) \\ \frac{1-x}{2} = y & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-y = 2x & (1) \\ \frac{1-x}{2} = y & (2) \end{cases}$$

En remplaçant y dans l'équation (1), on obtient l'équation $1 - \frac{1}{2} + \frac{x}{2} = 2x$, dont la solution est $x = \frac{1}{3}$. En remplaçant dans la seconde équation, on obtient $y = \frac{1}{3}$. L'équilibre de Nash du Duopole de Cournot est donc l'unique couple $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

A propos des équilibres de Nash de Pierre-Papier-Ciseaux. Réexaminons le jeu du pierre-papier-ciseaux de l'exemple 2.2 avec la notion d'équilibre de Nash. Vincianne et Sabrina devaient jouer à pierre-papier-ciseaux et la gagnante remportait 1€, la perdante perdait 1€. On sait déjà qu'aucune stratégie n'est strictement dominée. De plus, on peut montrer qu'il n'y a pas d'équilibre de Nash. Prenons par exemple le profil de stratégie $(\mathbf{Pi}, \mathbf{Ci})$, où **Pi** est la stratégie de Vinciane et **Ci** est la stratégie de Sabrina. On constate que Sabrina a une meilleure réponse face à **Pi**. En effet, face à la pierre, Sabrina jouera plutôt papier (**Pa**) ; si on regarde la matrice des gains ci-dessous elle passera ainsi d'un gain de -1 à un gain de $+1$. Le même raisonnement s'applique pour tous les profils de stratégies, ce qui nous permet de conclure que ce jeu n'admet pas d'équilibre de Nash.

$$\begin{array}{cc} & \text{Sabrina} \\ & \begin{array}{ccc} \quad\mathbf{Pi} & \quad\mathbf{Pa} & \quad\mathbf{C} \end{array} \\ \text{Vinciane} \begin{array}{c} \mathbf{Pi} \\ \mathbf{Pa} \\ \mathbf{C} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0) & (-1,1) & (1,-1) \\ (1,-1) & (0,0) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Il nous faut donc une nouvelle définition si on souhaite trouver les issues rationnelles de ce problème. C'est ça les mathématiques !

Remarque 4.6. Dans le jeu d'investissement de l'Exemple 2.3, nous avons trouvé deux équilibres de Nash, mais ça ne nous dit pas quelle stratégie choisir. Le principe de l'équilibre de Nash est que si on autorise les joueurs à communiquer ensemble et qu'ils choisissent un des deux équilibres, alors ils n'auront pas intérêt à changer de stratégie. Pour mieux comprendre cette idée, revenons au dilemme du prisonnier de l'Exemple 2.1. On peut montrer que l'unique équilibre de Nash de ce jeu est l'issue rationnelle que nous avions déjà trouvée c'est-à-dire (**Parler**,**Parler**). Imaginons qu'on autorise les deux prisonniers à communiquer entre eux avant de faire leur choix. Supposons qu'ils choisissent de **se taire** tous les deux d'un commun accord. Quand ils devront donner leur stratégie à la police, comme chacun sait que l'autre va **se taire** (s'il respecte leur accord) et que chaque joueur veut maximiser ses gains, ils décideront finalement de **parler** sans que l'autre le sache. Donc l'issue sera (**Parler**,**Parler**).

Voici quelques exercices :

"Standard de Liège olé olé, Standard de Liège olé olé... "

Exercice 4.7. Aujourd'hui se déroule un grand match : Standard-Anderlecht. Chaque entraîneur a le choix entre Jouer de façon offensive (**A**), défensive

(**D**) ou entre les deux (**M**). Ils doivent choisir avant que le match ne commence pour désigner les joueurs qui participeront. Les pronostics du match sont donnés par la matrice ci-dessous

$$\text{Standard} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{D} \end{array} \begin{array}{c} \text{Anderlecht} \\ \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{M} & \mathbf{D} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0,3) & (1,2) & (3,1) \\ (2,2) & (4,4) & (2,2) \\ (3,1) & (0,2) & (1,3) \end{pmatrix} \end{array}$$

Trouvez les équilibres de Nash.

Exercice 4.8. Deux joueurs doivent choisir une position sur l'intervalle [0,1] ; ils souhaitent tous les deux que leurs positions soient les plus proches possibles. Le gain sera donné par la fonction suivante : $g^i(a^1,a^2) = 1 - |a^1 - a^2|$. Modélisez cette situation et trouvez les équilibres de Nash.

Exercice 4.9. Cent joueurs sont conviés au *jeu de la balance*. Chaque joueur doit choisir entre le plateau de gauche ou celui de droite. Une fois qu'il ont fait leur choix, ils doivent le noter et le mettre dans une urne. Ensuite on les place avec l'aide de l'urne et on observe le résultat. Pour information, il s'agit d'une Balance Napoléon III et chaque personne pèse 80kg. Les gains sont les suivants :

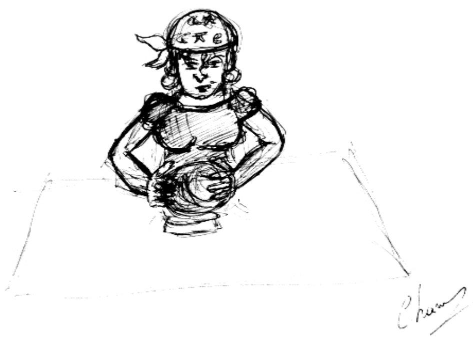
- les joueurs se trouvant sur la plateau le moins lourd gagnent mille Euros chacun ;
- les joueurs se trouvant sur le plateau le plus lourd perdent mille Euro chacun ;
- en cas d'égalité, tout le monde gagne 50€. Modélisez cette situation et trouvez les équilibres de Nash.

Exercice 4.10. Même exercice que le précédent (Exercice 4.9) sauf qu'il y a nonante-neuf joueurs. Modélisez cette situation, trouvez les équilibres de Nash.

5 Stratégies mixtes

Résumons brièvement les différentes notions définies jusqu'à présent. Nous avons rencontré les stratégies strictement dominées et les équilibres de Nash. Ces notions permettent, quand c'est possible, de prédire les stratégies que doivent suivre les joueurs s'ils souhaitent obtenir une issue rationnelle.

Dans Pierre-Papier-Ciseaux (Exemple 2.2), on a vu qu'il n'y avait ni équilibre de Nash, ni stratégie strictement dominée. On va néanmoins essayer de trouver une manière rationnelle de jouer à ce jeu. Pour ce faire, imaginons que Vincianne décide de participer à un tournoi de pierre-papier-ciseaux. Elle se dit que choisir de jouer tout le temps **pierre** n'est pas une bonne idée car quelqu'un pourrait découvrir sa stratégie et jouera en fonction, c'est-à-dire que son adversaire jouera tout le temps **papier** et donc Vincianne perdra tout le temps. Une autre possibilité serait de jouer la séquence pierre-ciseaux-papier-pierre-ciseaux-papier-pierre-... Encore une fois, ses adversaires, s'ils réfléchissent un peu, pourront prédire le prochain coup de la séquence et donc le contrer. Par exemple, si Vincianne vient de jouer **pierre**, il devinera que le prochain coup sera **ciseaux** et jouera **pierre** pour le contrer. Idéalement, Vincianne devrait employer une stratégie *imprévisible* pour n'importe quel adversaire. Donc Vincianne se dit que le seul moyen de ne jamais se faire contrer c'est de jouer aléatoirement pierre-papier-ciseaux et qui dit aléatoire dit *probabilité*.



"Je vais prédire votre stratégie avec une probabilité de $\frac{1}{5}$*"*

Définissons formellement la notion de *stratégie aléatoire* aussi appelée *stratégie probabiliste* ou encore *stratégie mixte* du joueur 1 sur un ensemble de stratégie A^1 fini.

Définition 5.1. Soit $G = (N, (A^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N})$ un jeu (sous forme stratégique). Une *stratégie mixte* du joueur 1 est une fonction $\sigma^1 : A^1 \to [0,1]$ telle que

$$\sum_{a^1 \in A^1} \sigma^1(a^1) = 1$$

Illustrons cette définition sur pierre-papier-ciseaux où $A^1 = \{\mathbf{PA}, \mathbf{PI}, \mathbf{C}\}$. Un exemple de stratégie mixte du joueur 1 est donné par $\sigma^1 : [0,1] \to A^1$ défini par :

$$\sigma^1(\mathbf{Pi}) = \frac{1}{4} \quad ; \quad \sigma^1(\mathbf{Pa}) = \frac{1}{4} \quad ; \quad \sigma^1(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}$$

Mais comment jouer une telle stratégie en pratique ? Il suffit de simuler une expérience aléatoire qui produira les mêmes probabilités. Pour la stratégie σ^1 définie ci-dessus, on pourra, par exemple utiliser une pièce et procéder comme suit : si on lance la pièce et qu'on obtient face, on jouera **Ciseaux**. Sinon on relance une nouvelle fois la pièce. Si on obtient pile, on joue **Papier** et si on obtient face on jouera **Pierre**.

Remarquons que la définition de gain doit elle aussi être changée. En effet, maintenant que chaque stratégie est probabilisée, on doit voir le gain comme étant l'*espérance* de la fonction de gain.

Définition 5.2. Soit $G = (N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$ un jeu (sous forme stratégique) à deux joueurs et (σ^1, σ^2) un profil de stratégies mixtes. La fonction des gains espérés du joueur i, notée Eg^i est l'espérance de la fonction de gain g^i,

$$Eg^i(\sigma^1,\sigma^2) = \sum_{(a^1,a^2)\in A^1\times A^2} \sigma^1(a^1)\cdot\sigma^2(a^2)\cdot g^i(a^1,a^2),$$

où $\sigma^1(a^1)\cdot\sigma^2(a^2)$ représente la probabilité que le profil de stratégies (a^1, a^2) se produise.

Si on prend par exemple la stratégie mixte $\sigma^V = (1/4, 1/2, 1/4)$ pour Vincianne et $\sigma^2 = (1/5, 2/5, 2/5)$ pour Sabrina, on aura que le gain de Vincianne est :

$$\begin{array}{rl} Eg^V(\sigma^1,\sigma^2) = & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot g^V(\mathbf{Pi},\mathbf{Pi}) + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot g^V(\mathbf{Pi},\mathbf{Pa}) + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot g^V(\mathbf{Pi},\mathbf{C}) \\ & +\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot g^V(\mathbf{Pa},\mathbf{Pi}) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot g^V(\mathbf{Pa},\mathbf{Pa}) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot g^V(\mathbf{Pa},\mathbf{C}) \\ & +\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot g^V(\mathbf{C},\mathbf{Pi}) + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot g^V(\mathbf{C},\mathbf{Pa}) + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot g^V(\mathbf{C},\mathbf{C}) \end{array}$$

c'est-à-dire :

$$\tfrac{1}{20}\cdot 0 + \tfrac{2}{20}\cdot -1 + \tfrac{2}{20}\cdot 1 + \tfrac{1}{10}\cdot 1 + \tfrac{2}{10}\cdot 0 + \tfrac{2}{10}\cdot -1 + \tfrac{1}{20}\cdot -1 + \tfrac{2}{20}\cdot 1 + \tfrac{1}{20}\cdot 0 = -\tfrac{1}{20}.$$

Donc $Eg^V(\sigma^1,\sigma^2) = -\frac{1}{20}$.

Maintenant que nous avons défini la notion de stratégie mixte, nous pouvons nous demander si il y a des équilibres de Nash en stratégies mixtes. Pour ce faire, nous devons considérer la notion de meilleure réponse, en stratégie mixte, d'un joueur face à une stratégie mixte de son adversaire. Formellement, il suffit de changer les stratégies par des stratégies mixtes dans la Définition 4.2. Ceci nous conduit naturellement à la notion d'équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Définition 5.3. Soit $G = (N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$ un jeu (sous forme stratégique) à deux joueurs, (σ^1, σ^2) un profil de stratégies mixtes. On dira que (σ^1, σ^2) est un **équilibre de Nash en stratégies mixtes** si et seulement si

σ^1 est la meilleure réponse face à σ^2 **et** σ^2 est la meilleure réponse face à σ^1.

Autrement dit (σ^1, σ^2) est un équilibre de Nash si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall \rho^1 \in A^1 & Eg^1(\rho^1, \sigma^2) \leq Eg^1(\sigma^1, \sigma^2) \\ \forall \rho^2 \in A^2 & Eg^2(\sigma^1, \rho^2) \leq Eg^2(\sigma^1, \sigma^2) \end{cases}$$

Nous allons, sur la base d'un exemple simple, expliquer comment on peut trouver les équilibres de Nash.

Exemple 5.4. Un joueur de foot et son gardien s'entraînent à tirer des pénalties. Pour pimenter un peu, si le gardien stoppe le ballon il gagne 1€ sinon il devra 1€ au tireur. Chaque joueur a le choix entre **Droite** ou **Gauche**. Si ils choisissent le même côté, c'est le gardien qui gagne, sinon c'est le tireur. Voici la matrice des gains :

$$\begin{array}{cc} & \text{Gardien} \\ & \begin{array}{cc} \quad\mathbf{G} & \qquad\mathbf{D} \end{array} \\ \text{Tireur} \begin{array}{c} \mathbf{G} \\ \mathbf{D} \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,1) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Comme nous pouvons le voir, nous sommes dans la même situation que dans le pierre-papier-ciseaux. Il n'y a pas de stratégie strictement dominée, ni d'équilibre de Nash. Mais existe-t-il un équilibre de Nash en stratégies mixtes ? Pou répondre à cette question, nous devons d'abord introduire deux notations. Soit α la probabilité qu'a le tireur de tirer à **Gauche** et $1-\alpha$ la probabilité de tirer à **Droite**. Soit β la probabilité qu'a le gardien de plonger à **Gauche** et $1-\beta$ la probabilité de plonger à **Droite**. Le gain espéré du tireur, $Eg^1((\alpha, 1-\alpha), (\beta, 1-\beta))$, sera alors :

$$\alpha\cdot\beta\cdot g(G,G)+\alpha\cdot(1-\beta)\cdot g(G,D)+(1-\alpha)\cdot\beta\cdot g(D,G)+(1-\alpha)\cdot(1-\beta)\cdot g(D,D)$$

Ce qui nous donne :

$$Eg^1((\alpha, 1-\alpha), (\beta, 1-\beta)) = -2\alpha(2\beta - 1) + (2\beta - 1)$$

Maintenant appliquons la définition de meilleure réponse pour le tireur. On doit fixer une stratégie du gardien. Remarquons que fixer une stratégie du gardien consiste à choisir sa probabilité de plonger à Gauche notée β_0. Sa probabilité de plonger à droite sera donnée par $(1-\beta_0)$. Fixons β_0 et cherchons la stratégie mixte du tireur qui maximise son gain espéré. Cela revient à chercher sa probabilité de tirer à gauche, c'est-à-dire α. Pour cela, on va considérer trois cas[10] : $2\beta_0 - 1 > 0$, $2\beta_0 - 1 < 0$, $2\beta_0 - 1 = 0$.

Premier cas : $2\beta_0 - 1 > 0$. Dans ce cas, $\beta_0 > \frac{1}{2}$ et le graphe de la meilleure réponse du tireur face à β_0 est donné par la Fig. 2. On voit donc que le maximum est atteint quand $\alpha = 0$.

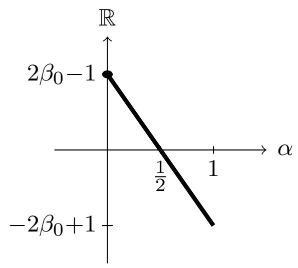


Fig. 2: $2\beta_0 - 1 > 0$

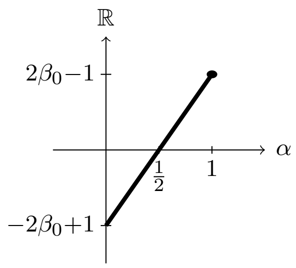


Fig. 3: $2\beta_0 - 1 < 0$

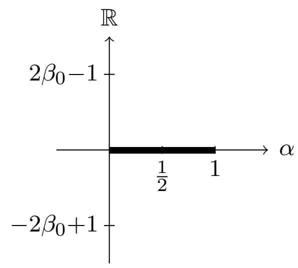


Fig. 4: $2\beta_0 - 1 = 0$

Second cas : $2\beta_0 - 1 < 0$. Dans ce cas, $\beta_0 > \frac{1}{2}$ et le graphe de la meilleure réponse du tireur face à β_0 est donné par la Fig. 3. On voit donc que le maximum est atteint quand $\alpha = 1$.

Troisième cas : $2\beta_0 - 1 = 0$. Dans ce cas, $\beta_0 = \frac{1}{2}$ et le graphe de la meilleure réponse du tireur face à β_0 est donné par la Fig. 4. On voit donc que le maximum est atteint quel que soit $\alpha \in [0, 1]$.

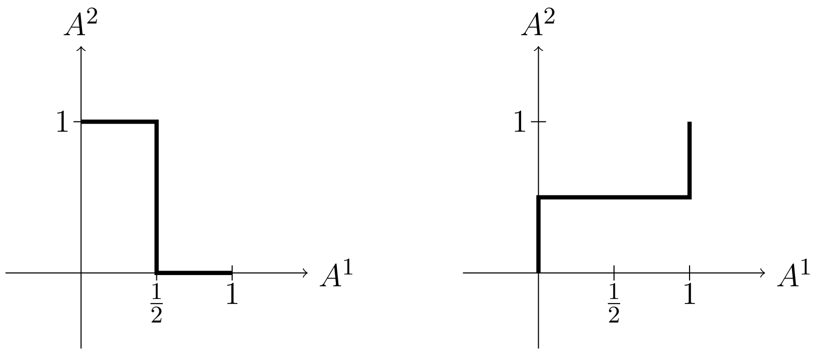
Un raisonnement analogue peut être tenu pour trouver le graphe de la meilleure réponse du gardien face à une stratégie α_0 du tireur. On trouve

[10] Une droite d'équation $y = ax + b$ peut avoir trois comportement, soit elle est le graphe d'un fonction croissante si a est positif, décroissante si a est négatif ou constante si a est nul.

alors que

$$\begin{cases} \beta = 0 & \text{quand } \alpha_0 > \frac{1}{2} \\ \beta = 1 & \text{quand } \alpha_0 < \frac{1}{2} \\ \beta \in [0,1] & \text{quand } \alpha_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On peut représenter graphiquement la meilleure réponse :



Ainsi si on superpose les deux graphiques, on obtient que l'équilibre de Nash, qui est donné par l'intersection des deux graphiques, est $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Remarque 5.5. On peut constater que, partant d'un exemple simple, les calculs permettant de trouver les équilibres de Nash ne sont pas aussi faciles qu'on pourrait le croire.

Pour le pierre-papier-ciseaux, nous vous épargnons le calcul long et fastidieux. L'équilibre de Nash est $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Pour y jouer, il suffit donc de prendre un dé à 6 faces, si on tombe sur 1 et 2 on joue **pierre**, si on tombe sur 3 et 4 on joue **papier** et si on tombe sur 5 et 6 on joue **ciseaux**.

Voici quelques exercices :

Exercice 5.6. Dans le jeu d'investissement, trouvez les équilibres de Nash en stratégie mixte.

Exercice 5.7. Le dilemme du prisonnier admet-il des équilibres de Nash supplémentaires en stratégies mixtes ?

6 Théorème de Nash

Le théorème de Nash est un théorème important dans la théorie des jeux. Il nous assure l'existence d'un équilibre dans les stratégies mixtes. Nash a obtenu le prix Nobel en 1994 pour ses travaux sur la théorie des jeux.

Théorème 6.1 (Nash 1950)**.** *Tout jeu fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

“J’adore quand je trouve une solution qui se déroule sans accro”.

La preuve du Théorème de Nash est basée sur la notion de *point fixe* d’une fonction. Plus précisément, la preuve du théorème de Nash consiste à s’assurer qu’une fonction liée à la notion de *meilleure réponse* admet bien un point fixe. L’énoncé formel et la preuve de ce théorème général de point fixe (appelé Théorème de Kakutani) ainsi que son lien avec le Théorème de Nash dépassent largement le cadre de ce document. Nous terminerons néanmoins en définissant la notion de point fixe et en prouvant un théorème de point fixe dans un cas très particulier.

Définition 6.2. Soit $C \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in C$ et $f : C \to C$. On dira que x_0 est un point fixe de f si et seulement si $f(x_0) = x_0$.

Exemple 6.3. La fonction $f(x) = x^2$ sur l’intervalle $[0,1]$ admet deux points fixes : 0 et 1.

Exemple 6.4. La fonction $\sqrt{x}$ sur l’intervalle $]0,1[$ n’admet aucun point fixe.

Rappelons le théorème des valeurs intermédiaires qui nous sera utile qui nous sera utile dans la preuve de notre théorème de point fixe.

Théorème 6.5 (Théorème des valuers intermédiaires)**.** *Soit une fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue *telle que* $f(a) \cdot f(b) < 0$*. Alors il existe au moins un réel* $c \in]a,b[$ *tel que* $f(c) = 0$*.*

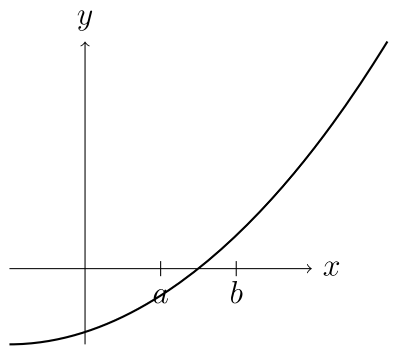


Fig. 5: Fonction continue sur $[a,b]$.

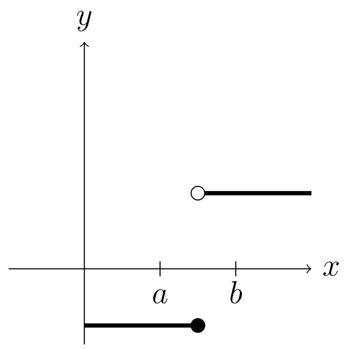


Fig. 6: Fonction discontinue sur $[a,b]$

La fonction représentée sur la Fig. 5 est un exemple où le théorème des valeurs intermédiares peut être appliqué. Tandis que la fonction représentée sur la Fig. 6 est un exemple où le théorème des valeurs intermédiaires ne s'applique pas.

Nous pouvons maintenant énoncer et prouver notre théorème de point fixe.

Théorème 6.6. *Si $f : [-1,1] \to [-1,1]$ est une fonction continue alors f admet un point fixe.*

Démonstration. Notre but est de trouver un point $x_0 \in [-1,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$. Pour ce faire, posons $g(x) = f(x) - x$. Il est facile de se rendre compte que la fonction f admet un point fixe (sur $[-1,1]$) si et seulement si la fonction g admet une racine (sur $[-1,1]$). En effet, $f(x_0) = x_0$ si et seulement si $g(x_0) = 0$.

Vu que $f : [-1,1] \to [-1,1]$, pour tout $x \in [0,1]$ on a $-1 \leq f(x) \leq 1$. En particulier, on peut en déduire les deux affirmations suivantes :

$$g(-1) = f(-1) - (-1) \geq -1 + 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 \leq 0. \quad (1)$$

Pour conclure, nous allons distinguer trois cas et dans chacun des cas, nous prouvons l'existence d'un racine de g et donc d'un point fixe de f.

Premier cas : $g(-1) = 0$. Dans ce cas, -1 est une racine de g et donc un point fixe de f.

Deuxième cas : $g(1) = 0$. Dans ce cas, 1 est une racine de g et donc un point fixe de f.

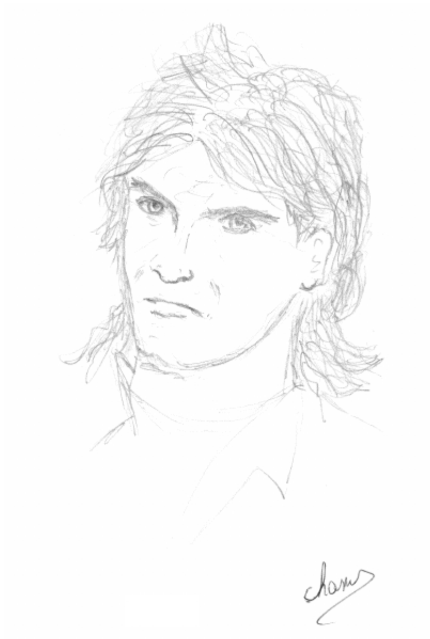
Troisème cas : $g(-1) > 0$ et $g(1) < 0$. Ce cas est le plus compliqué. Commençons par remarquer que la continuité de f sur $[-1,1]$ implique la continuité de g $[-1,1]$. En effet il s'agit de la somme de deux fonctions continues. On peut donc appliquer le *Théorème des valeurs intermédiaires* à la fonction g. Cela nous permet de conclure que la fonction g admet une racine et donc que la fonction f a un point fixe. $\square$

Nous vous laissons ci-dessous quelques exercices :

Exercice 6.7. Trouvez trois exemples où la définition 6.2 s'applique.

Exercice 6.8. Dans le théorème des valeurs intermédiaires, montrez que si on remplace l'hypothèse que $f(a) \cdot f(b) < 0$ par $f(a) \cdot f(b) \leq 0$, alors on ne peut plus garantir l'existence d'un point c tel que $a < c < b$ et $f(c) = 0$.

Exercice 6.9. Dans le théorème 6.6, montrez que l'hypothèse de continuité de f est nécessaire.



"A tout problème, il y a toujours une solution (avec un couteau-suisse)" Mc Gyver.