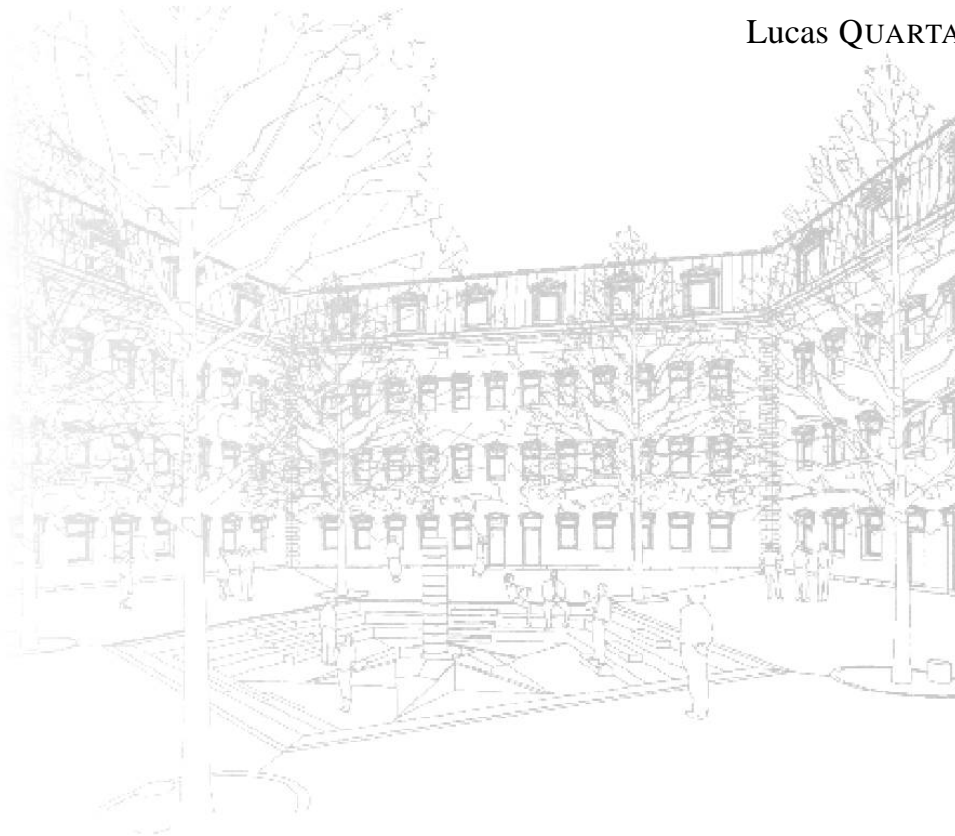


Cahier pédagogique #2
22 novembre 2001

Une introduction (élémentaire) à la théorie des ondelettes

Lucas QUARTA



Université de Mons-Hainaut
Institut de Mathématique

Tél : +32 65 37 35 07 — Fax : +32 65 37 33 18

Web : <http://www.umh.ac.be/math/institut>

Une introduction (élémentaire) à la théorie des ondelettes

Lucas QUARTA

22 novembre 2001

1 Introduction

Au début des années 1990, le mathématicien américain Michaël FRAZIER, spécialiste en analyse harmonique, utilisait une construction mathématique pour extraire d'un fond sonore le bruit caractéristique de la coque d'un sous-marin. À Saint-Louis (Missouri), Victor WICKERHAUSER utilisait les mêmes mathématiques pour permettre au FBI de stocker les empruntes digitales à moindre coût. À l'Université de Yale, Ronald COIFMAN s'en servait également pour dévoiler les secrets d'un enregistrement de Brahms au piano. (L'enregistrement effectué sur le phonographe de Thomas Edison date de 1889). Ces études diverses utilisent un nouveau langage mathématique dont l'alphabet consiste en des oscillations identiques — des « ondelettes » — judicieusement étirées ou comprimées. Tout un éventail d'informations — une voix, des empruntes digitales, une photo, des radiographies médicales, des ondes sismiques, des émissions provenant de l'espace — peut être transposé en ce nouveau langage. Souvent cette transformation en ondelettes réduit le temps de calcul, facilite l'analyse, la transmission et la compression de l'information, ou son extraction du « bruit » environnant.

Certains chercheurs ont pensé que les ondelettes pourraient supplanter l'analyse de Fourier, un important outil mathématique, vieux de presque deux siècles, utilisé notamment dans le développement de la téléphonie, de l'informatique ou dans le domaine audio-visuel. Maintenant, on constate que les deux langages se complètent. Un défaut de la transformée de Fourier est de cacher l'information sur le temps : elle nous informe quant au nombre de fréquences contenues dans le signal, mais tait l'instant d'émission des diverses fréquences. Elle agit comme si chaque instant du signal équivalait à tout autre, que le signal soit aussi complexe qu'une symphonie de Mozart ou aussi simple et brutal qu'un électrocardiogramme de crise cardiaque. L'information sur le temps n'est pas perdue (on peut reconstruire le signal à partir de la transformée de Fourier), mais elle est soigneusement ensevelie sous les phases : les mêmes sinus et cosinus peuvent représenter des moments très différents du signal parce qu'ils sont décalés en phase pour s'amplifier ou s'annuler. Dans cette optique, il est intéressant de travailler avec un outil qui décompose un signal à la fois en temps et en fréquence : les ondelettes seraient l'équivalent d'une partition pour un signal, indiquant non seulement quelles notes (fréquences) on doit jouer mais aussi à quel moment on doit les

jouer. Yves MEYER, un des fondateurs du sujet, écrit [1] : « à l'inverse de ce qui se passe pour les séries de Fourier, les coefficients d'une série d'ondelettes traduisent de façon simple, précise et fidèle les propriétés des fonctions, du moins les propriétés qui correspondent à une discontinuité, un événement imprévu. »

Je présenterai, dans ces notes, deux alternatives à la transformation de Fourier : la transformation de Fourier à fenêtre et la transformation par ondelettes. La première méthode permettra surtout de mettre en évidence des idées qui seront centrales lors de la présentation de la transformation par ondelettes. Cette dernière doit son succès à une méthode de discrétisation introduite en 1986 par Stéphane MALLAT et Yves MEYER — l'analyse multirésolution — et fortement développée par la suite, notamment par Ingrid DAUBECHIES, éminent Professeur belge de l'Université de Princeton. Je tenterai d'expliquer comment on peut construire une famille d'ondelettes (« ondelettes orthonormales ») qui forme une base de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ à partir d'une analyse multirésolution.

Les ouvrages cités en référence me semblent très accessibles pour des novices (dont je fais partie) en théorie des ondelettes. Je m'en suis en tout cas très fortement inspiré pour rédiger ces notes.

2 La transformation de Fourier à fenêtre

2.1 Le pourquoi et le comment

Supposons que l'on souhaite analyser le contenu fréquentiel d'un morceau de musique. Il peut être modélisé par une fonction f telle que $f(t)$ représente la pression de l'air sur notre tympan au temps t .

Si la mélodie n'est composée que d'une seule note, la fonction f sera périodique et les *séries de Fourier* constituent l'outil idéal pour l'analyser. Soit f périodique de période T , de carré intégrable sur sa période. Les coefficients de Fourier se calculent comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n := \int_0^T f(t) e^{-2\pi i n t / T} dt \quad (1)$$

et l'on a, au sens de la convergence dans L^2 ,

$$f = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n \cdot / T} \quad (2)$$

La formule (1) est appelée l'*analyse* du signal f car ces coefficients permettent d'analyser le contenu « harmonique » de f . La formule (2) donne une décomposition de f comme une série des modes harmoniques $e^{2\pi i n \cdot / T}$ de fréquence $\omega_n = n/T$. (Ici, toutes les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale $1/T$.) Elle est appelée la *synthèse* du signal car elle permet de reconstituer le signal f à partir de ses modes harmoniques.

Si la mélodie n'est pas périodique, une approche possible consiste à calculer la *transformée de Fourier continue* \hat{f} de f :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i \omega t} dt \quad (3)$$

Cette formule n'est correcte a priori que pour des fonctions intégrables — $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour des fonctions de carré intégrable — $f \in L^2(\mathbb{R})$ — un passage à la limite est nécessaire et est supposé réalisé lorsque j'écrirai une formule du type (3).

A nouveau, le signal f peut être reconstitué à partir de sa transformation de Fourier :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{2\pi i \omega t} d\omega. \quad (4)$$

Néanmoins, cette méthode n'est pas naturelle (puisqu'on utilise des fonctions périodiques pour représenter des signaux qui ne le sont pas nécessairement) et est loin d'être pratique : pour calculer \hat{f} on doit intégrer f sur « tout le temps » et donc $\hat{f}(\omega)$ contient l'amplitude totale de la fréquence ω dans le morceau complet plutôt que la distribution des harmoniques dans chacune des notes individuelles. Donc, on doit attendre la fin de la chanson pour calculer \hat{f} et le résultat est inintéressant du point de vue musical !

Une autre approche consisterait à « couper » le signal f en petits morceaux approximativement en notes individuelles et de les analyser séparément (grâce à des séries de Fourier). Cette démarche a un inconvénient évident : elle est trop arbitraire, il est impossible de savoir exactement quand une note donnée se termine et quand la suivante commence...

Une méthode plus naturelle s'inspirerait de notre expérience auditive. Notre oreille perçoit des changements de tonalités continus ou abruptes et cela sans aucune partition du signal. Puisque l'oreille analyse la fréquence d'un signal « en direct », notre modèle doit donner des informations sur la fonction f *simultanément* en temps et en fréquence. Nous allons donc modéliser la situation par une fonction \tilde{f} de deux variables : pour chaque valeur fixée t_0 , $\tilde{f}(\omega, t_0)$ représentera la distribution de la fréquence ω au temps $t = t_0$. Puisque l'oreille ne peut analyser ce qu'elle n'a pas encore entendu, seules les valeurs $f(t)$ pour $t \leq t_0$ peuvent entrer en ligne de compte dans le calcul de $\tilde{f}(\omega, t_0)$. Il est aussi raisonnable de supposer que notre oreille possède une mémoire limitée dans le temps, c'est-à-dire qu'il existe un intervalle de temps T tel que seules les valeurs $f(t)$ pour $t \geq t_0 - T$ influencent le calcul de $\tilde{f}(\omega, t_0)$. Enfin, on peut s'attendre à ce que les valeurs $f(t)$ pour t proche des extrémités de l'intervalle $[t_0 - T, t_0]$ influencent moins le calcul de $\tilde{f}(\omega, t_0)$ que celles pour t contenu « au centre » de cet intervalle.

Mathématiquement, nous allons considérer une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dépendant du temps, telle que $g(t) = 0$ si $t \notin [-T, 0]$, c'est-à-dire : $\text{supp } g \subset [-T, 0]$. Cette fonction g sera appelée la *fenêtre* de l'analyse : nous allons « regarder le signal f à travers cette fenêtre g ». On définit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_t(u) := \bar{g}(u - t)f(u)$$

où $\bar{g}(u-t)$ représente le conjugué du nombre complexe $g(u-t)$. On peut voir f_{t_0} comme une version locale de f , qui dépend uniquement des valeurs $f(t)$ pour $t \in [t_0 - T, t_0]$. Si la fonction g est supposée continue, alors les valeurs $f_{t_0}(u)$ seront petites pour u proche $t_0 - T$ et de t_0 (cfr. Fig. 1, 2, 3).

La transformée de Fourier à fenêtre de f est alors définie comme la transformée de Fourier de f_t :

$$\tilde{f}(\omega, t) := \hat{f}_t(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\bar{g}(u-t)e^{-2\pi i\omega u} du. \quad (5)$$

Si on définit les fonctions $g_{\omega t}$ par : $g_{\omega t}(u) := g(u-t)e^{2\pi i\omega u}$, (5) donne alors :

$$\tilde{f}(\omega, t) = \langle g_{\omega t} | f \rangle \quad (6)$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ représente le produit scalaire dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$.

Les fonctions $g_{\omega t}$ peuvent être considérées comme des « notes » qui oscillent à la fréquence ω dans une enveloppe définie par $|g(\cdot - t)|$.

Remarque. La condition $\text{supp } g \subset [-T, 0]$ a été imposée suite à des motivations « physiques » (le modèle proposé pour notre oreille est tout de même loin de la vérité !). Nous demanderons simplement que l'intégrale de la formule (5) soit bien définie : puisque le signal f est de carré intégrable, il suffit, grâce à l'inégalité de Hölder, d'imposer à g d'appartenir à ce même espace $L^2(\mathbb{R})$. La continuité de la fonction g est une hypothèse qui permet d'obtenir une localisation plutôt lisse qu'abrupte. Cette caractéristique sera importante par la suite.

2.2 La reconstruction du signal

Cette étape a pour but d'établir le substitut de la transformation de Fourier inverse afin de reconstruire le signal f à partir de sa transformation de Fourier à fenêtre \tilde{f} .

En appliquant la transformation de Fourier inverse à (5) par rapport à la variable ω , on obtient :

$$f_t(u) = \bar{g}(u-t)f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega, t)e^{2\pi i\omega u} d\omega. \quad (7)$$

Puisque la fonction g peut s'annuler, on ne peut pas diviser par $\bar{g}(u-t)$ afin d'obtenir $f(u)$. Multiplions plutôt les deux membres de l'égalité (7) par $g(u-t)$ et intégrons par rapport à la variable t :

$$f(u) \int_{-\infty}^{+\infty} |g(u-t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega, t)g_{\omega t}(u) d\omega dt. \quad (8)$$

Or, $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u-t)|^2 dt = \|g\|_{L^2}^2$ et cette valeur est non nulle (dans le cas contraire la fonction g serait identiquement nulle, on ne verrait dès lors plus rien à travers la fenêtre !). Nous obtenons donc la formule de reconstruction suivante :

$$f(u) = C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\omega t}(u)\tilde{f}(\omega, t) d\omega dt \quad (9)$$

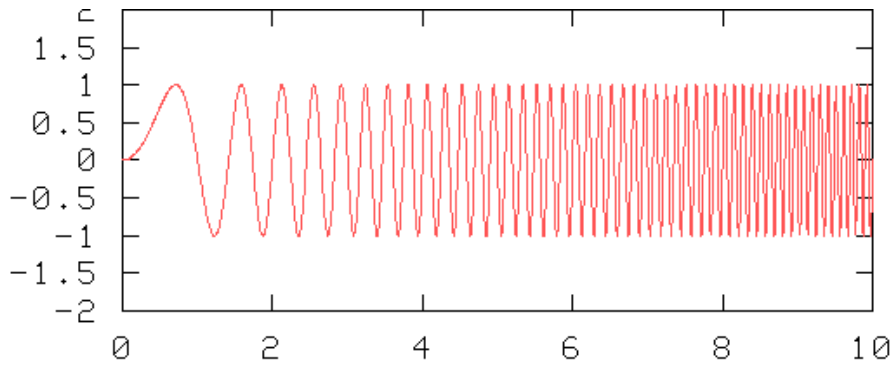


Figure 1: Le signal $f(t) = \sin \pi t^2$

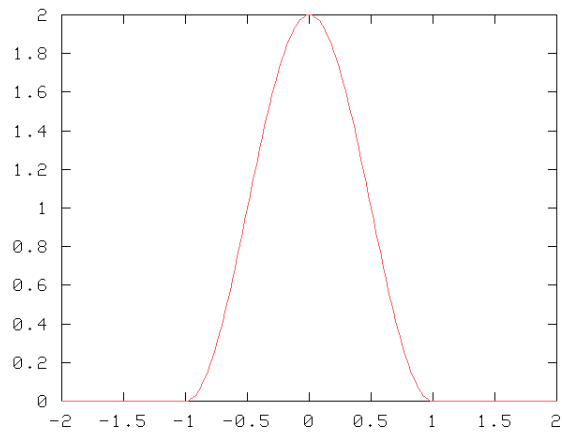


Figure 2: La fenêtre $g(t) = \begin{cases} 1 + \cos \pi t & \text{si } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

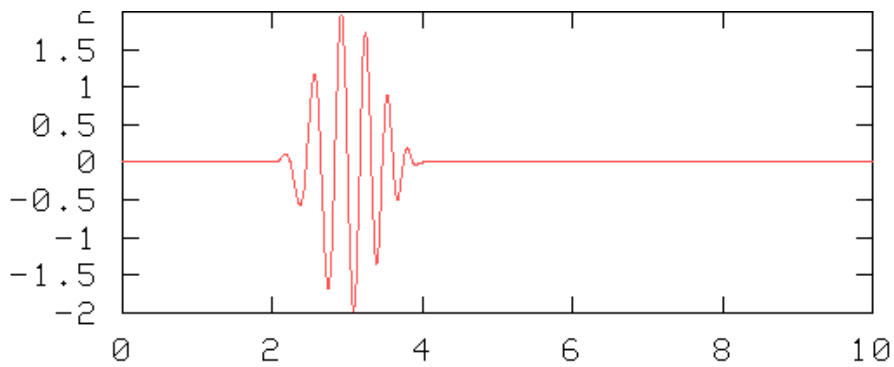


Figure 3: La version « locale » f_3 de f

c'est-à-dire que le signal est reconstruit par superposition des « notes » $g_{\omega t}$ avec la transformation de Fourier à fenêtre pour fonction donnant les coefficients.

2.3 Localisation temps-fréquence : le dilemme

Un aspect remarquable de la transformation de Fourier ordinaire (continue) est la symétrie qu'elle exprime entre le domaine du temps t et le domaine des fréquences ω : les formules (3) et (4) sont complètement symétriques en temps et en fréquences, mis à part le signe de l'exposant de l'exponentielle imaginaire.

À première vue, cette symétrie est perdue lorsqu'on considère la transformation de Fourier à fenêtre puisque temps et fréquence sont traités de façon différente lors du calcul de $\tilde{f}(\omega, t)$. Néanmoins, la transformation de Fourier à fenêtre est elle aussi symétrique par rapport à ces deux domaines : au vu de la formule (6) et grâce à l'identité de Parseval, on a

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega, t) &= \langle g_{\omega t} | f \rangle = \langle \hat{g}_{\omega t} | \hat{f} \rangle = e^{-2\pi i \omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i t \xi} \overline{\hat{g}(\xi - \omega)} d\xi \\ &= e^{-2\pi i \omega t} \left(\hat{f} \hat{g}(\cdot - \omega) \right)^\vee(t).\end{aligned}\quad (10)$$

Nous retrouvons une forme semblable à (5). Du point de vue fréquences, on débute avec le signal \hat{f} et on le localise au voisinage de la fréquence ω à l'aide de la fenêtre $\hat{g} : \hat{f}_\omega(\xi) := \overline{\hat{g}(\xi - \omega)} \hat{f}(\xi)$. On calcule ensuite la transformation de Fourier inverse de \hat{f}_ω et on multiplie le résultat par le facteur $e^{-2\pi i \omega t}$ qui exprime une « correction » due à la translation de \hat{g} dans le domaine des fréquences.

Ainsi, si la fenêtre g est raisonnablement bien localisée en temps **et** en fréquence (i.e. : si la fonction g est telle que $g(t)$ et $\hat{g}(\omega)$ soient petites respectivement, en dehors d'un petit intervalle de temps et en dehors d'une étroite bande de fréquences), les formules (5) et (10) montrent que la transformation de Fourier à fenêtre donne une analyse *temps-fréquence locale* du signal f car elle fournit des informations précises sur f simultanément en temps et en fréquence.

Cependant, toutes les fonctions obéissent au *Principe d'incertitude* de HEISENBERG. Ce principe affirme que des localisations précises en temps et en fréquence sont mutuellement exclusives. En d'autres termes, si les valeurs $g(t)$ sont petites en dehors d'un intervalle de temps de longueur T et si les valeurs $\hat{g}(\omega)$ sont petites en dehors d'une bande de fréquence de largeur Ω , alors on a une égalité du type $\Omega T \geq c$ où c est une constante proche de 1 (cfr. [1, 4]). Si on veut savoir si un signal « possède » la fréquence ω_0 , on doit « observer » ce signal sur au moins une période, c'est-à-dire sur un intervalle de temps plus long que $1/\omega_0$. On ne peut donc pas dire avec exactitude quand le signal a cette fréquence.

Le compromis offert par la transformation de Fourier à fenêtre est d'observer le signal f à travers une fenêtre g si bien que le paramètre t apparaissant dans $\tilde{f}(\omega, t)$ n'est pas aussi précis que dans $f(t)$ mais représente un intervalle de temps $([t - T, t]$ si $\text{supp } g \subset [-T, 0])$. De même, le paramètre ω apparaissant dans $\tilde{f}(\omega, t)$ ne représente

pas précisément la fréquence ω mais plutôt une bande de fréquences déterminée par la largeur de la fenêtre \hat{g} et localisée au voisinage de ω .

3 La transformation continue par ondelettes

3.1 Le pourquoi et le comment

La transformation de Fourier à fenêtre localise un signal simultanément en temps et en fréquence en l'observant à travers une fenêtre qui est translatée en temps et par conséquent en fréquence (on dit que la fenêtre est modulée dans le temps). Ces deux opérations donnent naissance aux « notes » $g_{\omega t}$. Le signal est ensuite reconstruit par superposition de ces notes avec la transformée $\tilde{f}(\omega, t)$ pour fonction donnant les coefficients. Par conséquent, tout comportement du signal concernant un intervalle de temps beaucoup plus court que la longueur de la fenêtre est sous-localisé dans le temps et doit être obtenu comme le résultat d'interférences constructives et destructives entre les notes (comme pour les séries de Fourier), ce qui signifie que beaucoup de notes vont être utilisées et que donc $\tilde{f}(\omega, t)$ doit être étendue en fréquence. Il en va de même pour des comportements du signal beaucoup plus courts que la longueur de la fenêtre. Cela rend la transformation de Fourier à fenêtre inefficace pour l'analyse de signaux réguliers dans le temps mais très rapides ou très lents par rapport à la taille de la fenêtre. Puisque l'obtention d'une réponse localisée dans le temps implique l'introduction d'une échelle de grandeur dans l'analyse (la taille de la fenêtre), il faut essayer de mettre au point une méthode de reconstruction qui soit indépendante de cette échelle. La solution à ce problème porte le nom de *transformation par ondelettes*.

Comme précédemment, on commence avec une fonction « fenêtre » $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ qui, cette fois, sera appelée *ondelette-mère*. Pour éviter toute dépendance par rapport à l'échelle de grandeur ainsi introduite, on n'utilise pas uniquement ψ mais aussi toutes les versions dilatées et comprimées de ψ . On définit

$$\forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \psi_s := |s|^{-1/2} \psi\left(\frac{\cdot}{s}\right). \quad (11)$$

La localisation dans le temps est obtenue en translatant ces différentes « versions » de ψ :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \psi_{st} := \psi_s(\cdot - t) = |s|^{-1/2} \psi\left(\frac{\cdot - t}{s}\right). \quad (12)$$

(Remarquons que le facteur $|s|^{-1/2}$ permet d'avoir $\forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall t \in \mathbb{R}, \|\psi\|_2 = \|\psi_{st}\|_2$.)

La *famille d'ondelettes* (ψ_{st}) engendrée par ψ joue un rôle identique à la famille de « notes » $(g_{\omega t})$ lors de transformation de Fourier à fenêtre.

La *transformation continue par ondelettes* d'un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ est définie par :

$$\tilde{f}(s, t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \overline{\psi_{st}}(u) \, du = \langle \psi_{st} | f \rangle. \quad (13)$$

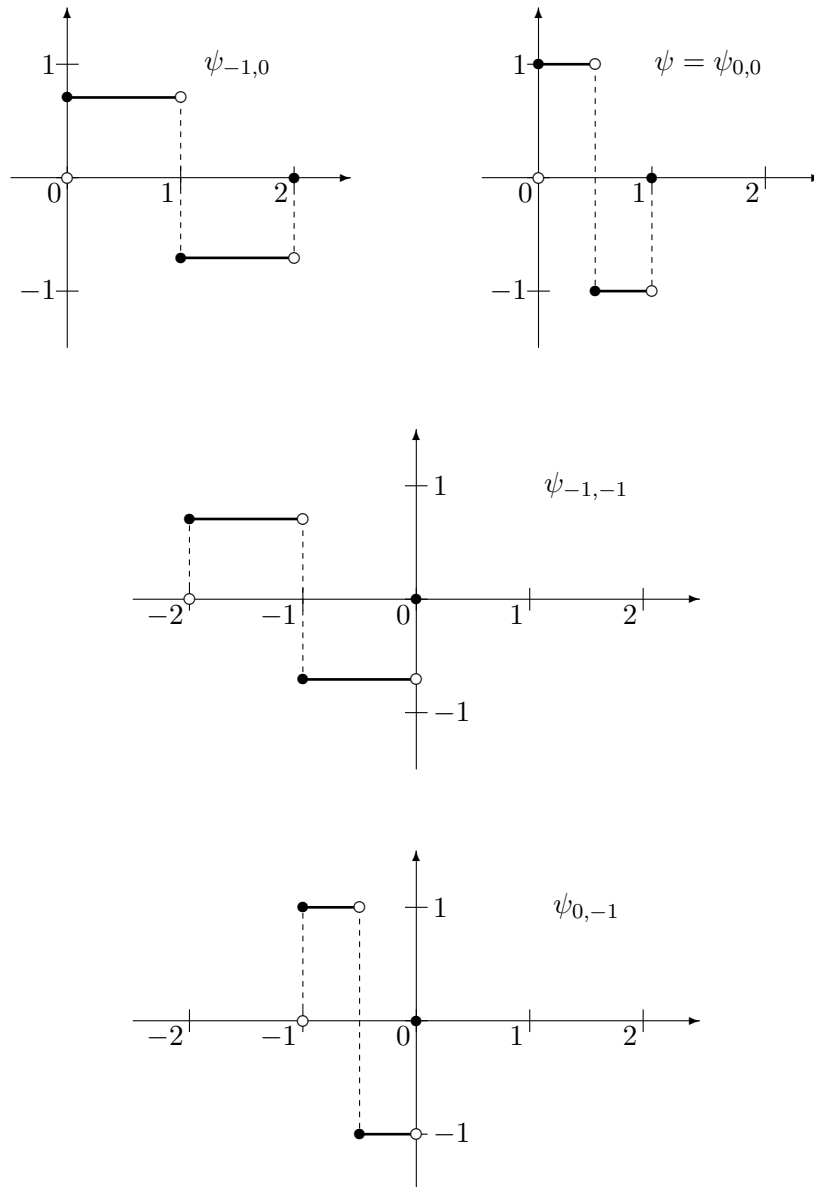


Figure 4: L'ondelette de Haar, $\psi := \chi_{[0,1/2[} - \chi_{[1/2,1[}$ et des versions dilatées et/ou translattées

3.2 La formule de reconstruction — condition d'admissibilité

Nous souhaitons reconstruire le signal f à partir de sa transformée continue par ondelettes $\tilde{f}(s, t)$. Dans un premier temps, procédons comme au chapitre 2. Appliquons l'identité de Parseval à (13) pour obtenir :

$$\begin{aligned}\tilde{f}(s, t) &= \langle \hat{\psi}_{st} | \hat{f} \rangle \\ &= |s|^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \omega t} \overline{\hat{\psi}(s\omega)} \hat{f}(\omega) d\omega \\ &= |s|^{1/2} \left(\hat{f} \overline{\hat{\psi}(s \cdot)} \right)^\vee (t).\end{aligned}\quad (14)$$

Comme fonction de la variable t , $\tilde{f}(s, \cdot)$ est donc la transformation de Fourier inverse de la fonction $\hat{f} \overline{\hat{\psi}(s \cdot)}$. En appliquant la transformation de Fourier aux deux membres de l'égalité précédente, on obtient donc :

$$|s|^{1/2} \overline{\hat{\psi}(s\omega)} \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega t} \tilde{f}(s, t) dt. \quad (15)$$

Dès lors, le problème consiste à retrouver $\hat{f}(\omega)$, ce qui permettra d'obtenir $f(t)$. Cette fois encore, on ne peut pas simplement diviser les deux membres de l'égalité (15) par $\overline{\hat{\psi}(s\omega)}$ puisque cette fonction pourrait s'annuler. Multiplions les deux membres par le complexe conjugué $\hat{\psi}(s\omega)$ et intégrons par rapport au paramètre s . Dans la théorie, les valeurs positives et négatives de s jouent des rôles différents. Commençons par intégrer uniquement sur les valeurs positives de s . On a :

$$\hat{f}(\omega) \cdot \int_0^{+\infty} s^{1/2} |\hat{\psi}(s\omega)|^2 ds = \int_0^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega t} \hat{\psi}(s\omega) \tilde{f}(s, t) dt. \quad (16)$$

Posons $Y(\omega) := \int_0^{+\infty} s^{1/2} |\hat{\psi}(s\omega)|^2 ds$ et supposons, pour l'instant, qu'il existe deux constantes A et B , $0 < A \leq B < +\infty$ telles que

$$A \leq Y(\omega) \leq B \quad \text{pour presque tout } \omega \in \mathbb{R} \quad (17)$$

(Nous étudierons plus loin les conséquences de cette hypothèse.)

Cela nous permet de diviser les deux membres de l'inégalité (16) par $Y(\omega)$ et d'obtenir ainsi :

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= Y(\omega)^{-1} \int_0^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega t} \hat{\psi}(s\omega) \tilde{f}(s, t) dt \\ &= Y(\omega)^{-1} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s^{-1/2} \hat{\psi}_{st}(\omega) \tilde{f}(s, t) dt ds \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s^{-1/2} \hat{\psi}^{st}(\omega) \tilde{f}(s, t) dt ds\end{aligned}\quad (18)$$

où l'on a défini une nouvelle famille d'« ondelettes » (ψ^{st}) au travers de leur transformation de Fourier :

$$\hat{\psi}^{st}(\omega) := Y(\omega)^{-1} \hat{\psi}_{st}(\omega). \quad (19)$$

Remarque. $|\hat{\psi}^{st}(\omega)| \leq A^{-1}|\hat{\psi}_{st}(\omega)|$ et donc $\psi^{st} \in L^2(\mathbb{R})$.

Le signal d'origine f peut donc être retrouvé, en prenant la transformation de Fourier inverse de (18) :

$$f(u) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s^{-1/2} \psi^{st}(u) \tilde{f}(s, t) dt ds. \quad (20)$$

Sous cette forme, cette formule de synthèse n'est pas satisfaisante car elle nécessite le calcul de tous les membres de la nouvelle famille (ψ^{st}) . Elle le serait beaucoup plus, par contre, si cette famille pouvait être obtenue à partir d'une seule « ondelette-mère » par translations et dilatations (comme la famille d'ondelettes initiale (ψ_{st})).

Par la définition (19), on a :

$$\begin{aligned} \psi^{st}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega)^{-1} e^{2\pi i \omega u} \hat{\psi}_{st}(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s^{1/2} Y(\omega)^{-1} e^{2\pi i \omega (u-t)} \hat{\psi}(s\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Si on pose :

$$\begin{aligned} \psi^s(u) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} s^{1/2} Y(\omega)^{-1} e^{2\pi i \omega u} \hat{\psi}(s\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s^{-1/2} Y\left(\frac{\omega}{s}\right)^{-1} e^{2\pi i \omega u/s} \hat{\psi}(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (21)$$

On a clairement

$$\psi^{st}(u) = \psi^s(u - t).$$

Les translations ne posent donc aucun problème. Concentrons-nous sur les dilatations. Une condition suffisante afin d'avoir $\psi^s(u) = s^{-1/2} \psi^1(u/s)$ est, au vu de (21),

$$Y\left(\frac{\omega}{s}\right) = Y(\omega) \quad \text{pour presque tout } \omega \in \mathbb{R} \text{ et pour presque tout } s > 0. \quad (22)$$

C'est-à-dire que la fonction Y doit être constante sur les ω positifs et sur les ω négatifs, ces deux constantes étant a priori différentes.

Nous n'avons pas gardé suffisamment de liberté pour pouvoir imposer une telle condition. Néanmoins, si on retourne à l'équation (15), rien ne nous empêche de multiplier les deux membres par une fonction poids arbitraire $W(s)$ avant d'intégrer sur les valeurs positives de s . La définition de la fonction Y serait alors

$$Y(\omega) := \int_0^{+\infty} W(s) s^{1/2} |\hat{\psi}(s\omega)|^2 ds.$$

En prenant $W(s) := s^{-3/2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{si } \omega > 0, \quad Y(\omega) &= \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(s\omega)|^2}{s} ds = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi =: C_+ \\ \text{si } \omega < 0, \quad Y(\omega) &= \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(s\omega)|^2}{s} ds = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(-\xi)|^2}{\xi} d\xi =: C_- \end{aligned}$$

La condition (22) est ainsi satisfaite. De plus, l'hypothèse (17) est remplie si

$$0 < C_{\pm} = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\pm\xi)|^2}{\xi} d\xi < +\infty. \quad (23)$$

La relation (23) est appelée *condition d'admissibilité* de l'ondelette-mère ψ . On peut maintenant facilement calculer l'ondelette-mère ψ^1 de la famille (ψ^{st}) . Par (21),

$$\begin{aligned} \psi^1(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega)^{-1} e^{2\pi i \omega u} \hat{\psi}(\omega) d\omega \\ &= C_-^{-1} \int_{-\infty}^0 e^{2\pi i \omega u} \hat{\psi}(\omega) d\omega + C_+^{-1} \int_0^{+\infty} e^{2\pi i \omega u} \hat{\psi}(\omega) d\omega \\ &= C_-^{-1} \psi_-(u) + C_+^{-1} \psi_+(u) \end{aligned} \quad (24)$$

où ψ_- et ψ_+ sont les composantes de fréquence négative et positive de l'ondelette ψ .

Remarques.

1. La fonction ψ^1 est appelée l'ondelette-mère réciproque de l'ondelette-mère ψ . On montre facilement que l'ondelette-mère ψ^1 vérifie la condition d'admissibilité et que son ondelette-mère réciproque est l'ondelette-mère ψ (cfr. [4]).
2. Si ψ est telle que $C_- = C_+ := C/2$ alors on a $\psi^1 = (2/C)\psi$ et seul C doit être calculé. C'est le cas, par exemple, si ψ est à valeurs réelles (car dans ce cas : $\hat{\psi}(-\omega) = \overline{\hat{\psi}(\omega)}$).

En conclusion, lorsque l'ondelette-mère ψ est admissible au sens de (23), tout signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ peut être reconstruit par superposition de la famille d'ondelettes réciproque $(\psi^{st})_{\substack{s>0 \\ t \in \mathbb{R}}}$ avec la transformée continue par ondelette $\tilde{f}(s, t)$ pour fonction donnant les coefficients :

$$f(u) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s^{-2} \psi^{st}(u) \tilde{f}(s, t) dt ds \quad (25)$$

(la formule (25) diffère de la formule (20) suite à l'introduction de la fonction poids $W(s)$).

Cependant, si l'ondelette-mère ψ est telle que $\hat{\psi}$ est identiquement nulle pour les fréquences ω négatives — ou positives — (ce qui est parfois utile en pratique, cfr. [4]), alors on ne peut plus procéder de la même façon car, dans ce cas, $C_- = 0$ — ou $C_+ = 0$ — (cfr. (23) et (24)). La relation (14) montre que si $\hat{\psi}(\omega) = 0$ pour $\omega < 0$ alors, pour $s > 0$, $\tilde{f}(s, t)$ ne dépend que de $\hat{f}(\omega)$ pour $\omega > 0$. Il sera donc impossible de retrouver la partie négative des fréquences du signal f en intégrant uniquement sur les valeurs positives de s . Pour retrouver le signal original dans son entièreté, on doit donc nécessairement intégrer à la fois sur les valeurs négatives et positives de s . En appliquant la même méthode (en utilisant cette fois la fonction poids $W(s) = |s|^{-3/2}$), la condition d'admissibilité de l'ondelette-mère ψ devient :

$$0 < C := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi = C_- + C_+ < +\infty. \quad (26)$$

Le signal est alors synthétisé par superposition de la famille d'ondelettes réciproque $(\psi^{st})_{\substack{s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ t \in \mathbb{R}}}$ avec $\tilde{f}(s, t)$ pour fonction donnant les coefficients :

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |s|^{-2} \psi^{st}(u) \tilde{f}(s, t) dt ds$$

3.3 Une analyse temps-« échelle » plutôt que temps-« fréquence »

Pourquoi avoir changé le « nom » de la variable ω (en analyse harmonique, souvent utilisée pour parler de la fréquence) et la remplacer par s ? Bien que l'on soit toujours libre de choisir le « nom » d'une variable, cela ne s'est pas fait ici par hasard ! La transformation continue par ondelettes est une analyse « temps-échelle » plutôt que « temps-fréquence » comme la transformation de Fourier à fenêtre. Nous allons expliquer ici pourquoi ces deux types d'analyse sont très proches. La lettre s a été choisie en référence au mot anglais « scale »-échelle en français. (L'expression française « faire des gammes » est traduite en anglais par « to practice scales »). Cette analogie musicale se traduit-elle en théorie des ondelettes ?

Les conditions d'admissibilité (23) et (26) imposent que $\hat{\psi}$ tende vers 0 lorsque ω tend vers 0. Si la fonction $\hat{\psi}$ est continue (ce qui est le cas, par exemple, si $\psi \in L^1(\mathbb{R})$), alors on a $\hat{\psi}(0) = 0$, c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Une ondelette doit donc être réellement une « petite onde » ! Elle ne peut pas ressembler à une bosse (comme une Gaussienne) mais doit osciller autour de l'axe du temps t . (La propriété $\hat{\psi}(0) = 0$ est automatiquement obtenue lorsque l'ondelette-mère ψ est produite par une analyse multirésolution, cfr. chapitre 4 et [3, 4]). De plus, puisque $\hat{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$, les valeurs $\hat{\psi}(\omega)$ doivent devenir essentiellement petites lorsque $|\omega|$ tend vers $+\infty$. Si ce comportement au voisinage de 0 et de $+\infty$ s'effectue rapidement, alors les valeurs $\hat{\psi}(\omega)$ seront petites en dehors d'une « bande de fréquences » $\alpha \leq |\omega| \leq \beta$ ($0 < \alpha < \beta$). La définition (12) donne alors que $\hat{\psi}_{st}(\omega)$ est petite en dehors de la bande de fréquences $\alpha/|s| \leq |\omega| \leq \beta/|s|$. La relation (14) assure que $\tilde{f}(s, t)$ contient des informations concernant $\hat{f}(\omega)$ essentiellement dans cette bande et $\hat{\psi}(s\omega)$ joue donc le rôle de fenêtre localisante en fréquence.

Alors que la transformation de Fourier à fenêtre « module » la fenêtre en temps pour la *translater* en fréquence, la transformation par ondelettes dilate et contracte la fenêtre en temps afin de produire ce même « échelonnement » en fréquence. Cela semble bien plus naturel du point de vue musical : lorsqu'on monte d'une octave, on *double* la fréquence, on ne la translate pas via un terme additif constant.

Évidemment, puisque toutes les échelles $s \neq 0$ sont utilisées, la reconstruction est fortement redondante. Idéalement, le spectre des fréquences devrait être recouvert en discrétisant les dilatations et contractions de l'ondelette-mère ψ . C'est ce que nous allons développer dans le chapitre suivant.

4 Analyse discrète par ondelettes et analyse multirésolution

Dans le chapitre 3, nous avons exprimé un signal f comme une superposition continue d'ondelettes avec la transformation continue par ondelettes $\tilde{f}(s, t)$ comme fonction donnant les coefficients. Cette reconstruction du signal est extrêmement *redondante* dans le sens où toutes les ondelettes sont utilisées et qu'elles sont « linéairement dépendantes ». Une première méthode de discrétisation, assez efficace bien que toujours redondante, consiste en une généralisation des théorèmes d'échantillonnage de Shannon. Elle permet d'obtenir de bonnes approximations en ignorant les « notes » qui ont des paramètres de temps et de fréquence « très grands » (cfr. [2, 3, 4]). En 1986, une méthode radicalement différente est mise au point : l'*analyse multirésolution*. Elle est complètement récursive et donc idéale pour faire des calculs. De plus, elle engendre une famille d'ondelettes orthonormales (elle forme une base de l'espace $L^2(\mathbb{R})$), ce qui réduit la redondance à néant.

Idée générale. (Cfr. [3] et [4] pour la preuve des résultats annoncés).

Plutôt que de commencer avec une ondelette-mère ψ , on débute avec une *analyse multirésolution* (AMR), c'est-à-dire : une suite $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-ensembles fermés de $L^2(\mathbb{R})$ telle que

- (i) $\forall j \in \mathbb{Z} : V_j \subset V_{j+1}$
- (ii) $\forall j \in \mathbb{Z} : f \in V_j \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_{j+1}$
- (iii) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
- (iv) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
- (v) il existe une fonction $\varphi \in V_0$ telle que $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormale de V_0 . Une telle fonction φ est appelée une fonction d'échelle de l'AMR.

Remarques.

1. La fonction d'échelle φ est en quelque sorte « le potentiel » qui permet de construire une ondelette-mère ψ à partir de l'AMR.
2. Il est facile de prouver que :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad \{\varphi_{jk} := 2^{j/2} \varphi(2^j \cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

forme une base orthonormale de V_j .

3. On comprend dès à présent que l'intervalle d'échantillonnage dans le temps est fixé à 1 tandis que le facteur d'échelle est fixé à 2.

Exemple. Un exemple d'AMR est la suite $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ où V_j est l'espace de toutes les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ constantes sur les intervalles $[k/2^j, k + 1/2^j]$ ($k \in \mathbb{Z}$). Une fonction d'échelle de cette AMR est $\varphi = \chi_{[-1, 0]}$. Cette AMR permet de construire l'ondelette de Haar via la méthode que nous allons décrire ci-après.

Notons P_j le projecteur sur l'espace V_j :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad P_j f := f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_{jk} \langle f | \varphi_{jk} \rangle. \quad (27)$$

Nous pouvons considérer f_j comme une version « floue » de f , à la résolution 2^j . Afin de construire des ondelettes orthonormales à partir de l'AMR $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, considérons le supplémentaire orthogonal W_j de V_j dans V_{j+1} :

$$W_j := \{f \in V_{j+1} : \forall g \in V_j, \langle f | g \rangle = 0\} \quad (28)$$

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (29)$$

Puisqu'une dilatation n'altère pas l'orthogonalité, on a :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad f \in W_j \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in W_{j+1}. \quad (30)$$

Notons Q_j le projecteur sur l'espace W_j . Par (29), on a :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad P_j Q_j = Q_j P_j = 0 \quad \text{et} \quad P_{j+1} = P_j + Q_j.$$

Donc, pour $J \in \mathbb{Z}$ fixé :

$$\forall j > J, \quad P_{j+1} = P_J + \sum_{k=J}^j Q_k. \quad (31)$$

Puisque $V_j \subset V_{j+1}$ et $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$, il est raisonnable de penser que plus $j > 0$ sera grand, moins « floue » sera la version f_j de f . On prouve en effet que $P_j f \rightarrow f$ (au sens L^2) lorsque $j \rightarrow +\infty$. Par (31), on obtient donc :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad f = P_J f + \sum_{k=J}^{+\infty} Q_k f. \quad (32)$$

C'est-à-dire que f est décrite comme une version « floue » (à la résolution 2^J) à laquelle on ajoute successivement des détails $d_k = Q_k f$ de plus en plus fins. À la limite lorsque $J \rightarrow -\infty$, « la version floue $P_J f$ devient tellement floue qu'on n'y voit plus rien » ! Autrement dit, on prouve que $P_J f$ converge vers 0 (au sens L^2) lorsque $J \rightarrow -\infty$ et donc, par (32), pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Q_k f$ c'est-à-dire,

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{k=-\infty}^{+\infty} W_k. \quad (33)$$

Au vu de (30) et (33), suffirait-il donc de construire une base orthonormale de W_0 pour construire une famille d'ondelettes orthonormales sur $L^2(\mathbb{R})$?

On peut en effet prouver que :

Si $\psi \in W_0$ est telle que $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormale de W_0 , alors ψ est l'ondelette-mère de la famille d'ondelettes orthonormales $(\psi_{jk})_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{Z}}}$ sur $L^2(\mathbb{R})$ où $\psi_{jk} = 2^{j/2} \psi(2^j \cdot - k)$.

Le théorème suivant nous donne alors une méthode de construction d'ondelettes orthonormales sur $L^2(\mathbb{R})$ à partir d'une AMR :

$\psi \in W_0$ est l'ondelette-mère d'une famille d'ondelettes orthonormales sur $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\hat{\psi}(2\cdot) = e^{i\nu(2\cdot)} \overline{m_0(\cdot + \pi)} \hat{\varphi} \quad \text{presque partout sur } \mathbb{R}$$

où

- φ est une fonction d'échelle de l'AMR,
- m_0 est la fonction 2π -périodique, appartenant à $L^2([0, 2\pi])$ et telle que $\hat{\varphi}(2\cdot) = \hat{\varphi} m_0$ presque partout sur \mathbb{R} . (m_0 est appelé le filtre d'échelle associé à φ .)
- ν est une fonction mesurable, 2π -périodique telle que $|\nu| = 1$ presque partout sur \mathbb{R} .

Puisque $(\psi_{jk})_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{Z}}}$ forme une base de $L^2(\mathbb{R})$, on a, au sens $L^2(\mathbb{R})$,

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f | \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}.$$

Exemples. - L'ondelette de Haar (voir Fig. 4) peut être construite par cette méthode, à partir de l'AMR décrite plus haut (cfr. page 13) en prenant : $\varphi = \chi_{[-1,0]}$, $m_0 = \frac{1}{2}(1 + e^{i\cdot})$ et $\nu = e^{-i\cdot}$. On obtient alors

$$\hat{\psi}(2\cdot) = \frac{1}{2}(\chi_{[0,1]})^\wedge - \frac{1}{2}(\chi_{[0,1]}(\cdot - 1))^\wedge$$

c'est-à-dire que

$$\psi = \chi_{[0,1/2]} - \chi_{[1/2,1]}$$

- L'ondelette de Shannon. On peut la construire à partir de l'AMR

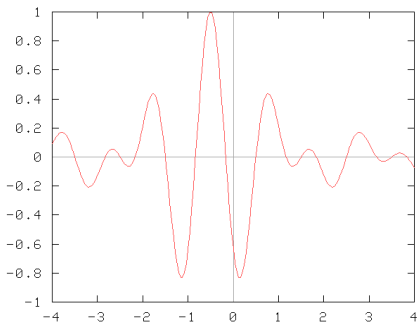
$$V_j := \overline{\text{ev}} \{ \varphi_{jk} = 2^{j/2} \varphi(2^j \cdot - k) : k \in \mathbb{Z} \}$$

où φ est la fonction d'échelle telle que $\hat{\varphi} = \chi_{[-\pi, \pi]}$. En prenant

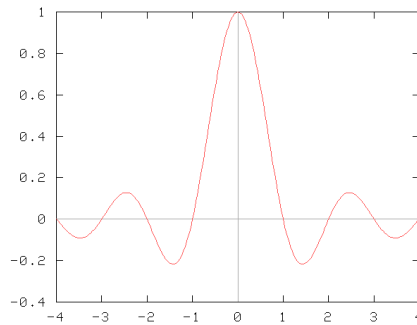
$$m_0(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 & \text{si } \xi \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

et $\nu = e^{-i\cdot}$, on obtient

$$\hat{\psi} = e^{i\cdot/2} \chi_{[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]}.$$



$$\psi(t) = -2 \frac{\sin(2\pi t) + \cos(\pi t)}{\pi(2t + 1)}$$



$$\varphi(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Références

- [1] B. Burke Hubbard, Ondes et Ondelettes. La saga d'un outil mathématique, Pour la Science, 1995.
- [2] I. Daubechies, Ten Lecutres on Wavelets, Society for Industrial and Applied Math., 1992.
- [3] E. Hernandez, G. Weiss, A first course on Wavelets, CRC Press, 1996.
- [4] G. Kaiser, A Friendly Guide to Wavelets, Birkhäuser, 1994.
- [5] Y. Meyer, Ondelettes et Opérateurs I – Ondelettes, Hermann, 1990.

Cahiers pédagogiques récents

[1] Maurice BOFFA, *Fonctions récursives*, 20 avril 2001.

Les cahiers pédagogiques de l'*Institut de Mathématique* sont consultables et téléchargeables sur le site : <http://www.umh.ac.be/math/preprints/>. Si vous voulez recevoir des copies papier, veuillez écrire à l'adresse suivante :

Institut de Mathématique
Université de Mons-Hainaut
« Le Pentagone », 6 av. du champ de Mars
7000 Mons, Belgique