Mathématiques générales

Examen (28 août 2012)

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Déterminer tous les sous-groupes d'ordre 4 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. $/4$

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 2. Dans chacun des cas suivants, donnez (si possible) un polynôme qui satisfait la propriété donnée. Justifiez votre réponse. /8

(a) Un polynôme p_1 à coefficients complexes possédant (au moins) deux racines α et β telles que $\alpha^2 = \mathbf{i}$ et $\beta^2 = \alpha$.

(b) Un polynôme p_2 de degré 2, à coefficients réels tel que $p_1(1) = p_1(\mathbf{i}) = 0$.

(c) Un polynôme p_3 de degré 3, à coefficients réels dont toutes les racines sont dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(d) Un polynôme p_4 de degré 4, à coefficients complexes dont les seules racines sont $1 + \mathbf{i}$ et $2 + \mathbf{i}$.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

/6

Question 3. Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application arbitraire (il est sous-entendu que $\operatorname{Dom} f = X$). Soit $A \subseteq X$ un sous-ensemble.

(a) Montrer que $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$ si et seulement s'il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$.

(b) A-t-on toujours que $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$?

(c) A-t-on toujours que $f^{-1}\big(f\big(f^{-1}(f(A))\big)\big) = f^{-1}\big(f(A)\big)$?

N'oubliez pas de justifier vos réponses par une preuve ou par un contre-exemple.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 2 math

Question 4. /4

(a) Compléter la définition suivante de la convergence vers 0 d'une suite de nombres réels $(u_n)_{n\geqslant 0}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \ldots$$

(b) Démontrer que la suite de terme général[1]

$$\frac{n!}{n^n}$$

converge vers 0. On utilisera la définition rappelée précédemment (donc sans faire appel aux théorèmes connus sur les limites).

[1] On rappelle que pour un entier naturel n, on désigne par $n!$ l'entier égal au produit de tous les entiers de 1 à n.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

/6

Question 5. On considère $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, i.e.[2] $\mathscr{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$. Pour rappel, une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est bornée sur $X \subseteq \mathbb{N}$ si et seulement si la formule suivante est satisfaite : $\exists b \in \mathbb{N},\ \forall n \in X,\ f(n) \leqslant b$. On définit la relation binaire R sur $\mathscr{F}$ comme suit :

$$(f,g) \in R \quad \text{ssi} \quad \forall\, X \subseteq \mathbb{N},\ \big((f \text{ est bornée sur } X) \Rightarrow (g \text{ est bornée sur } X)\big).$$

Déterminez si les formules suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

(a) $\exists g \in \mathscr{F},\ \exists f \in \mathscr{F}, \quad (f,g) \in R.$

(b) $\exists g \in \mathscr{F},\ \exists f \in \mathscr{F}, \quad (f,g) \notin R.$

(c) $\exists g \in \mathscr{F},\ \exists f \in \mathscr{F}, \quad (f,g) \in R$ et $(g,f) \notin R.$

(d) $\exists g \in \mathscr{F},\ \forall f \in \mathscr{F}, \quad (f,g) \in R.$

[2] Pour rappel, la notation sous-entend que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{N}$.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 6.

/5

(a) Soient a et b deux nombres complexes et t un paramètre réel. Montrer que

$$f(t) = |a + t\bar{b}|^2$$

peut s'exprimer comme un trinôme du second degré $At^2 + Bt + C$ dont les coefficients sont réels. En étudiant le signe de ce trinôme, prouvez que

$$\mathrm{Re}(ab) \leqslant |a|\,|b|.$$

(b) Par quelle expression peut-on remplacer $f(t)$ pour prouver l'inégalité $\mathrm{Im}(ab) \leqslant |a|\,|b|$ en raisonnant comme ci-dessus ? Justifiez votre réponse.

Nom :

Prénom :

Section : BAC 2 math

Question 7. Soit $p \geqslant 0$ un réel positif. Déterminer tous les réels positifs $q \geqslant 0$ tels que /3

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q p^n = 1.$$

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 8. Soit $S = \{P(X) \in \mathbb{Q}[X] \mid P(0) = P(1) = -1 \text{ et } P(-1) = 1\}$. $/5$

(a) Montrer que S contient un unique polynôme $P_0(X)$ tel que $\deg P_0 = 2$.

(b) Montrer que $S = \left\{P_0(X) + (X^3 - X)Q(X) \;\middle|\; Q(X) \in \mathbb{Q}[X]\right\}$.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 2 math	

Question 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction (définie sur $\mathbb{R}$). /4

(a) Définissez « $a \in \mathbb{R}$ est un point en lequel f possède un minimum local ».

(b) Définissez « $a \in \mathbb{R}$ est un point qui réalise le minimum global de f sur $\mathbb{R}$ ».

(c) Supposons que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et que qu'elle aie un unique point critique a (i.e. $f'(a) = 0$) en lequel f possède un minimum local. Montrez qu'alors $f(a)$ est un minimum global de f.