Problèmes de Mathématique

Examen

(14 août 2019)

Nom : Trapani
Prénom : Clara
Section : Bloc 3 math

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Répondez *explicitement* aux questions posées !
- Quand il est nécessaire de *justifier*, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur.
- En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Rédigez *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ une matrice. $/4$

(a) Montrez que A est de rang[1] 1 si et seulement si $A = ab^\top$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}^{N\times 1} \setminus \{0\}$.

(b) La décomposition $A = ab^\top$ du point précédent est-elle unique (quand elle existe) ?

[1] Rappelons que le rang d'une matrice est le rang de l'application linéaire qu'elle définit.

Nom : Trapani
Prénom : Clara
Section : Bloc 3 math

/4

Question 2. Pour chacune des affirmations ci-dessous, dites si elle est correcte ou non. Justifiez vos réponses. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ (où $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction f est croissante, mais pas strictement croissante sur $\mathbb{R}_0$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_0$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction f est décroissante, mais pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}_0$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_0$.

Nom : Trapani	
Prénom : Clara	
Section : Bloc 3 math	

/4

Question 3. Pour rappel, pour une fonction $f : E \to F$, on définit l'*image directe* d'un ensemble $A \subseteq E$ par $f_*(A) := \{f(x) \in F \mid x \in A \cap \operatorname{Dom} f\}$ et l'*image réciproque* de $B \subseteq F$ par $f^*(B) := \{x \in \operatorname{Dom} f \mid f(x) \in B\}$. On a donc deux fonctions $f_* : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F)$ et $f^* : \mathscr{P}(F) \to \mathscr{P}(E)$.

(a) Supposons que $f : E \to F$ soit une application bijective et, comme à l'accoutumée, notons f^{-1} sa fonction réciproque. Montrez que, pour tout $B \subseteq F$, $f^*(B) = (f^{-1})_*(B)$.

(b) Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions. A-t-on $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$? Justifiez par un argument détaillé ou un contre-exemple.

Nom : Trapani	
Prénom : Clara	
Section : Bloc 3 math	

Question 4. Existe-t-il une application $\mathbb{R}$-linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que l'image par f de tout plan est une droite ? /5

Nom : Trapani
Prénom : Clara
Section : Bloc 3 math

Question 5. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$. On dit que $k \in E_n$ est un carré d'entier s'il existe $z \in \mathbb{Z}$ tel que $k = z^2$. Autrement dit, k est un carré d'entier si et seulement si l'équation $X^2 - k = 0$ a une solution $z \in \mathbb{Z}$. $/5$

Posons $C_n := \{k \in E_n \mid k \text{ est un carré d'entier}\}$.

Soient S_n le groupe des permutations de E_n et $p \in S_n$, considérons la propriété suivante :

$$\forall k \in E_n, \quad k \in C_n \Rightarrow p(k) \in C_n. \tag{1}$$

(a) Exprimez en bon français la propriété (1).

(b) Prouvez que si p vérifie (1), alors

$$\forall k \in E_n, \quad k \notin C_n \Rightarrow p(k) \notin C_n. \tag{2}$$

(c) Prouvez que p vérifie (1) ssi

$$\forall k \in E_n, \quad k \in C_n \Leftrightarrow p(k) \in C_n. \tag{3}$$

(d) Prouvez que $G_n := \{p \in S_n \mid p \text{ vérifie (1)}\}$ est un sous-groupe de S_n.

Nom : Trapani
Prénom : Clara
Section : Bloc 3 math

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom : Trapani	
Prénom : Clara	
Section : Bloc 3 math	

Question 6. Soient $a_1,\ a_2,\ a_3,\dots$ des nombres réels. /4

(a) Définir la convergence de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

(b) Définir la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

(c) Montrer en détail que si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$.

Nom : Trapani
Prénom : Clara
Section : Bloc 3 math

Question 7. Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$.

/5

(a) Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ultimement constante ».

(b) Prouvez que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est *pas* ultimement constante et $x_n \to 0$, alors il existe une sous-suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x'_n \to 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x'_n \neq 0$.

Nom : Trapani	
Prénom : Clara	
Section : Bloc 3 math	

Question 8. /4

(a) Soit $(G, *, e)$ un groupe et $x \in G$. Définir $\operatorname{ord}(x)$.

(b) Déterminer les groupes $(G, *, e)$ d'ordre au moins 2 tels que la fonction

$$f : G \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : x \mapsto \big(\operatorname{ord}(x) - 1\big) \bmod n\mathbb{Z}$$

avec $n = |G| - 1$, soit un morphisme de groupes.
Indication : Commencer par prouver que f est triviale en comparant les ordres de G et de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(c) Déterminer les groupes $(G, *, e)$ d'ordre n tels que $G \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} : x \mapsto \operatorname{ord}(x) \bmod n\mathbb{Z}$ est bien défini et un morphisme de groupe.