Calculus I (partie A)

Examen (6 janvier 2020)

Nom:
Prénom:
Section:

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2\cos^2(x) - \lambda\, e^x$ où $\lambda \in \left]0,1\right]$ est un paramètre. Montrez que l'équation $\partial_x f(x) = 0$ possède une unique solution dans $[-\pi/4, 0]$. $/4$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes :

/6

$$x_n = \frac{\cos(4n^3) + n^2}{n^3 + 5}, \qquad y_n = \frac{(-1)^n (n+1)^3 + 2}{3 + 5n^2}, \qquad z_n = \frac{(-1)^n n - n^2}{4n + 1}.$$

Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. Calculez les limites suivantes au sens large, si elles existent : /6

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4x+1}{x+1}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2+3x-4}{x-1}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to3} \frac{|x-3|}{x-3}$.

Détaillez vos arguments et identifiez clairement les résultats utilisés.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

/5

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x + 3 & \text{si } x < -2, \\ 3x + |\lambda| & \text{si } x \in [-2, 1], \\ e^{2\sin(x)} - 1 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour chaque $a \in [-2, 1[$, dites, en discutant en fonction de λ si nécessaire,

(a) si f est continue (ou non) en a ;

(b) si f est dérivable en a.

Justifiez toutes vos affirmations en identifiant clairement les différents résultats utilisés.

Calculus I (partie A)

Examen (6 janvier 2020)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos\left(e^{x+x^2} + x - 1\right)$. Détaillez et justifiez les différentes étapes de vos calculs.

$/4$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case appropriée selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse par un bref argument (rigoureux) ou un contre-exemple.

/8

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ deux sous-suites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers le même réel a, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ La suite $\left(\left(\frac{5+4\alpha}{2\alpha}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens large quel que soit $\alpha \in \,]-\infty,0[$.

Calculus I (partie A)

Examen (6 janvier 2020)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6 (suite).

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\dfrac{o(x)}{1+o(x)} = o(x)$ lorsque $x \to 0$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Supposons qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $f(x) = 2 + 3x + x^2 + o\big((x-1)^3\big)$. Alors f est dérivable en 1 et $\partial f(1) = 3$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse.

$/4$

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\operatorname{Dom} f \subseteq \operatorname{adh}(\operatorname{Dom} f)$;

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\operatorname{adh}(\operatorname{Dom} f) \subseteq \operatorname{Dom} f$.

Justifiez vos réponses par un raisonnement (dont les différentes étapes sont détaillées) ou par un contre-exemple. Veuillez rappeler la définition d'adhérence que vous utilisez.

Nom :
Prénom :
Section :

/5

Question 8. Soit $f \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ où $a < b$ sont deux réels.

- Définissez « f est strictement croissante sur $[a,b]$ ».

- Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\big(\forall x \in \,]a,b[,\ \partial f(x) > 0\big) \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $[a,b]$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\big(\forall x \in \,]a,b[,\ \partial f(x) > 0\big) \Leftarrow f$ est strictement croissante sur $[a,b]$.

Justifiez vos réponses par un raisonnement détaillé (qui énonce les résultats du cours utilisés) ou par un contre-exemple.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \operatorname{Dom} f$. Prouvez l'équivalence suivante :

/4

$$a \notin \operatorname{adh}\big(\operatorname{Dom} f \setminus \{a\}\big) \qquad \iff \qquad \exists r > 0,\ [a-r, a+r] \cap \operatorname{Dom} f = \{a\}.$$