

Calculus I (partie A)

Examen

(29 mai 2020)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur toutes les feuilles.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 2 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Question 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application dont le développement de Taylor d'ordre 3 en 0 est $x + x^2$. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en 0 de l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cos(f(x))$. Justifiez votre développement en citant (mais sans nécessairement redémontrer) les règles de calculs sur les petits o .

/4

Question 2. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de la suite suivante :

/2

$$x_n = \frac{\sin(\sqrt{2n}) + n^3}{n^6 + 2}.$$

Question 3. Calculez la limite suivante au sens large, si elle existe :

/2

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4x^2 + 7x - 3}{1 - x}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Question 4. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

/5

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{x+1} - 1 & \text{si } x < -1, \\ 2\lambda^2 x + \cos(\pi\lambda) & \text{si } x \in [-1, 1], \\ -x^2 + 3\lambda & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. En discutant en fonction de λ si nécessaire, dites si f est dérivable en $a = -1$ et en $a = 1/2$. Justifiez toutes vos affirmations en identifiant clairement les différents résultats utilisés.

Calculus I (partie A)

Examen (29 mai 2020)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R})$ où $a < b$ sont deux réels. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse.

/4

(a) Vrai : Faux : $(\forall x \in]a, b[, \partial f(x) \geq 0) \Rightarrow f$ est croissante sur $[a, b]$.

(b) Vrai : Faux : f est strictement décroissante sur $[a, b] \Rightarrow (\forall x \in]a, b[, \partial f(x) < 0)$.

Justifiez vos réponses par un raisonnement détaillé (qui énonce les résultats du cours utilisés mais ne se contente pas d'un « résultat du cours ») ou par un contre-exemple.