

Calculus I (partie A)

Examen

(14 août 2020)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 2 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Question 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ une application dont le développement de Taylor d'ordre 4 en 0 est $x^2 + x^3$. Donnez le développement de Taylor d'ordre 4 en 0 de l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(\sin(x))$. Justifiez votre développement en citant (mais sans nécessairement redémontrer) les règles de calculs sur les petits o .

/4

Question 2. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de la suite suivante :

/2

$$x_n = \frac{-3n^5 - \cos(n^8)n^3}{2n^3 - \pi}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Question 3. Calculez la limite suivante au sens large, si elle existe :

/2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^{2/5} + x^{1/2}}{4 + 3x^{2/3}}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Question 4. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

/4

$$f(x) = \begin{cases} e^{\lambda^2(x-\pi)} - \lambda^2 & \text{si } x \leq \pi, \\ \lambda \sin(x) & \text{si } x \in]\pi, 5], \\ x^2 + \lambda x + 1 & \text{si } x > 5, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. En discutant en fonction de λ si nécessaire, dites si f est dérivable en $a = \pi$ et continue en $a = 4$. Justifiez toutes vos affirmations en identifiant clairement les différents résultats utilisés.

Calculus I (partie A)

Examen (14 août 2020)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. Un étudiant affirme que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ est décroissante car, dit-il, sa dérivée vaut $\partial f(x) = -1/x^2$ et celle-ci est négative quel que soit $x \in \text{Dom } \partial f$. A-t-il raison? Si vous pensez que oui, détaillez son argument, en particulier en identifiant précisément le résultat qu'il utilise. Si vous pensez que non, non seulement prouvez que son affirmation est fausse mais de plus identifiez précisément quelle est la faille dans son raisonnement.

/4