Calculus I (partie A)

Examen (4 janvier 2021)

Nom :

Prénom :

Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 2 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Question 1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /4

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x^2+x)+\lambda x & \text{si } x \leqslant 0, \\ e^{\lambda x}+\lambda & \text{si } x \in \,]0,1], \\ x^2+2\lambda x+\lambda^2 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. En discutant en fonction de λ si nécessaire, dites si f est dérivable en $a=0$ et continue en $a=3/2$. Justifiez toutes vos affirmations en identifiant clairement les différents résultats utilisés.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ une application dont le développement de Taylor d'ordre 3 en 1 est $1 + x + x^2$. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en 0 de l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f\bigl(\cos(x)\bigr)$. Justifiez votre développement en citant (mais sans nécessairement redémontrer) les règles de calculs sur les petits o.

Nom :
Prénom :
Section :

/4

Question 3. Calculez, si elles existent, la limite au sens large des suites suivantes :

$$x_n = \frac{\cos(2n^2) + n^2 + (-1)^n \cdot n}{n^3 + 1} \qquad \text{et} \qquad y_n = \frac{\sin(\sqrt{n}) + n^3 + (-1)^n}{n^2 + 3n + 2}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section :

/4

Question 4. Calculez les limites suivantes au sens large, si elles existent :

$$\lim_{x\to 3} \frac{-3x^2+3x+18}{3-x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^4-x^2+8x}{-5x^4+7}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Calculus I (partie A)

Examen (4 janvier 2021)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/4

Question 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2+1}{\ln x}.$$

(a) Montrez que $f(2^{-1}) < 0$.

(b) Montrez que $f(2) > 0$.

(c) Montrez que $\forall x \in \operatorname{Dom} f,\ f(x) \neq 0$.

Les faits (a)–(c) que vous venez de prouver semblent contredire le théorème des valeurs intermédiaires (TVI). Pour chacune des raisons potentielles suivantes, dites si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifiez chacune de vos réponses.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction f n'est pas continue.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction f n'est pas dérivable.

(f) Vrai : ☐ Faux : ☐ On ne peut pas appliquer le TVI pour une autre raison (veuillez préciser cette dernière dans votre justification).