Calculus I (partie A)

Examen (28 mai 2021)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 2 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Question 1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /4

$$f(x) = \begin{cases} e^{\lambda \sin(x)} & \text{si } x < 0, \\ \lambda(x+1)^3 - \lambda + 1 & \text{si } x \in [0,4[, \\ (x-4)^2 & \text{si } x \geqslant 4, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. En discutant en fonction de λ si nécessaire, dites si f est dérivable au point $a = 0$ et continue en $a = e^{-1}$. Justifiez toutes vos affirmations en identifiant clairement les différents résultats utilisés.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Calculus I (partie A)

Examen (28 mai 2021)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ une application dont le développement de Taylor d'ordre 3 en 1 est $3x + x^3$. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en 0 de l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(\mathrm{ch}(x))$. Justifiez votre développement en citant (sans redémontrer) les règles de calculs sur les petits o. La qualité de votre rédaction est importante. $/4$

Calculus I (partie A)

Examen (28 mai 2021)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Calculez, si elles existent, les limites suivantes au sens large des suites de termes génériques : /4

$$x_n = \frac{\left(\sin(3\sqrt{n}) + (-1)^n \cdot n^3\right)^2}{n^6 + 3} \qquad \text{et} \qquad y_n = \frac{\sqrt{n} + n^{-3} + (-1)^n}{\sqrt[3]{n} + 3\sin(n) + 2}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. Calculez les limites suivantes au sens large, si elles existent : /4

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+x-1}{1+x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^5-\sin x^2+8x}{(x^2+1)(7-x^3)}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Calculus I (partie A)

Examen (28 mai 2021)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est vraie ou fausse. *La qualité de vos justifications est importante.* /4

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$, alors il existe un $p \in \mathbb{N}$ tel que $(x_n)_{n\geqslant p}$ soit croissante.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ n'est pas continue car $\lim_{x \underset{<}{\longrightarrow} 0} f(x) \neq \lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} 0} f(x)$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \notin \operatorname{adh}(\operatorname{Dom} f)$. Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.