Calculus I

Examen (23 août 2021)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres MAJUSCULES votre *nom*, *prénom* et *section* (MATH, PHYS, INFO, PINFO) sur *toutes* les feuilles.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM,...) n'est autorisé. Votre GSM doit être en mode silencieux.
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Question 1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /4

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\left(1 + x + \sin(x^2)\right)^3 & \text{si } x \leqslant 0, \\ e^{\lambda x} - e^{\lambda^2 x} & \text{si } x \in \left]0, \pi\right], \\ \lambda \sin(x) & \text{si } x > \pi, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. En discutant en fonction de λ si nécessaire, dites si f est dérivable au point $a = 0$ et continue en $a = \pi$. Justifiez toutes vos affirmations en identifiant clairement les différents résultats utilisés.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Calculus I

Examen (23 août 2021)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ une application dont le développement de Taylor d'ordre 3 en 2 est $1 - x^2$. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en e de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(2\ln(x))$. Justifiez vos calculs en citant (sans redémontrer) les règles de calcul sur les petits o. La qualité de votre rédaction est importante. /4

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. Calculez, si elles existent, les limites suivantes au sens large des suites de termes génériques :

$$x_n = \frac{2\sqrt{n+\sin n}}{\sqrt{2n}+(-1)^n \sin n} \qquad \text{et} \qquad y_n = \frac{n^3-3^n}{n^3+(-2)^n}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

/4

Calculus I

Examen (23 août 2021)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Calculez les limites suivantes au sens large, si elles existent :

/4

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+\sin x^8}{(x^4+\sqrt{x+2})^2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x+\sin x}{\sqrt{x+4}-2}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Calculus I

Examen (23 août 2021)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A \subseteq \mathbb{R}$.

/4

(a) Définissez V est un voisinage de a :

(b) Prouvez que $a \notin \operatorname{adh} A$ si et seulement s'il existe un voisinage V de a tel que $V \cap A = \varnothing$.