

Calculus I

Examen (12 janvier 2022)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres MAJUSCULES votre *nom*, *prénom* et *section* (MATH ou INFO) sur *toutes* les feuilles.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM,...) n'est autorisé. Votre GSM doit être en mode silencieux.
- L'examen dure 4 heures.
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Question 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \text{Dom } f$. En utilisant la définition en termes de suites de la continuité (à rappeler), montrez que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, alors f est continue en a .

/3

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Calculez, si elles existent, les limites suivantes au sens large des suites de termes génériques :

$$x_n = \frac{n^2 - 4n}{3n^4 + \sin(n+2) - 1}$$

$$y_n = \frac{-n^3 + (-1)^n n + 1}{\sqrt{n} + 6}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 3. Calculez les limites suivantes au sens large, si elles existent :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + \cos(\sqrt{x})}{(x^3 + 2x)^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 2x^2 - 12}{x - 2}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

/4

Question 4. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^2 - 8 & \text{si } x \leq 1, \\ e^{x-1} - 2\lambda & \text{si } x \in]1, 3], \\ \lambda x & \text{si } x > 3, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. En discutant en fonction de λ si nécessaire, dites si f est dérivable au point $a = 1$ et continue en $a = 2\pi$. Justifiez toutes vos affirmations en identifiant clairement les différents résultats utilisés.

/4

Calculus I

Examen (12 janvier 2022)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Calculus I

Examen (12 janvier 2022)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en 0 de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{x^2+x^3}$. Justifiez vos calculs en citant (sans redémontrer) les règles de calcul sur les petits o. La qualité de votre rédaction est importante.

/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6.

/3

- (a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Définissez « f est strictement décroissante ».

- (b) Énoncez le théorème de la moyenne et donnez en une interprétation géométrique. Vous devez faire *explicitement* le lien entre l'énoncé et le graphique.

Question 7. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Montrez que si f n'est pas constante, alors il existe nécessairement au moins un $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\partial f(\gamma) \neq 0$. Expliquez votre démarche. *Indication* : La question 6 peut vous être utile.

/2

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 8. Supposons que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez vos réponses par une preuve ou un contre-exemple.

/5

- (a) Vrai : Faux : Si f est strictement décroissante, alors $\forall x \in \mathbb{R}, \partial f(x) \leq 0$.
- (b) Vrai : Faux : Si $\forall x \in \mathbb{R}, \partial f(x) < 0$, alors f est strictement décroissante.
- (c) Vrai : Faux : Si f est strictement décroissante, alors $\forall x \in \mathbb{R}, \partial f(x) < 0$.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par

$$x_n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - 5} \right)^n$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Étudiez la convergence au sens large de (x_n) en fonction de λ . Lorsque (x_n) converge, donnez la valeur de sa limite.

/5

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 10. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case appropriée selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse par un bref argument (rigoureux) ou un contre-exemple. *La qualité de vos justifications est importante.*

/4

(a) Vrai : Faux : La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ est strictement décroissante car $\forall x \in \text{Dom } f, \partial f(x) = -1/x^2 < 0$.

(b) Vrai : Faux : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et V un voisinage de 0. Alors $f(V) := \{f(x) \mid x \in V\}$ est un voisinage de $f(0)$.