Calculus I

Examen (12 janvier 2022)

Correction

Question 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. En utilisant la définition en termes de suites de la continuité (à rappeler), montrez que si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, alors f est continue en a.*

Comme l'énoncé le stipule, il s'agit d'utiliser la définition en termes de suites de la continuité de f en a. Commençons par rappeler cette définition. La fonction f est continue en a si et seulement si, pour toute suite (x_n) dans le domaine de f, si $x_n \to a$, alors $f(x_n) \to f(a)$. Il est également important de comprendre que l'hypothèse « $\lim_{x\to a} f(x)$ existe » veut dire

$$\exists b \in \mathbb{R},\ \underbrace{\forall (x_n) \subseteq \operatorname{Dom} f,\ x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b}_{(*)}. \tag{1}$$

En comparant les deux définitions, on se rend compte que le travail à réaliser consiste à montrer que le b dont (1) affirme l'existence est en fait $f(a)$ puisqu'alors $(*)$ sera exactement la définition de continuité. Or, en particularisant (1) à la suite constante $(x_n) := (a)$ (qui est bien dans le domaine de f vu qu'on a supposé que $a \in \operatorname{Dom} f$), on a $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b$. Bien entendu, la suite constante $(x_n) = (a)$ converge vers a et on a donc $f(a) = f(x_n) \to b$. Mais la suite $(f(x_n))$ est la suite constante $(f(a))$ qui converge aussi vers $f(a)$. Par unicité de la limite $b = f(a)$.

Question 2. *Calculez, si elles existent, les limites suivantes au sens large des suites de termes génériques :*

$$x_n = \frac{n^2 - 4n}{3n^4 + \sin(n+2) - 1} \qquad y_n = \frac{-n^3 + (-1)^n n + 1}{\sqrt{n} + 6}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Attention, pour ce type d'exercice, il existe de nombreuses manières de s'y prendre. Vous devez cependant avoir le même niveau de justification que la solution proposée ici.

- Pour la suite (x_n) :

  En mettant en évidence les termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur on obtient :

  $$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(1 - 4/n)}{n^4\left(3 + \frac{\sin(n+2)}{n^4} - \frac{1}{n^4}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1 - 4/n}{\left(3 + \frac{\sin(n+2)}{n^4} - \frac{1}{n^4}\right)}$$

  On va analyser séparément la convergence de la suite $\left(\frac{\sin(n+2)}{n^4}\right)$, en montrant par convergence dominée que $\frac{\sin(n+2)}{n^4} \to 0$. On a

  $$\forall n > 0,\ \left|\frac{\sin(n+2)}{n^4}\right| = \frac{|\sin(n+2)|}{|n^4|} = \frac{|\sin(n+2)|}{n^4} \leqslant \frac{1}{n^4}$$

  Il est important de justifier que la dernière inégalité est vraie car $\forall n > 0, |\sin(n+2)| \leqslant 1$. Comme $n^4 > 0$, le sens de l'inégalité est conservé. La deuxième égalité se justifie par le fait que $n^4 > 0$, quel que soit $n > 0$. Détail important pour la convergence dominée : cette inégalité est vraie pour tout naturel à partir d'un certain rang (ici, 1).

Comme la suite $(\frac{1}{n^4})$ converge vers 0 (car par un résultat du cours $\forall p > 0, \frac{1}{n^p} \to 0$, ici $p = 4 > 0$), la convergence dominée nous assure que la suite $\left(\frac{\sin(n+2)}{n^4}\right)$ converge vers 0.

On a également que :

- $1 \to 1$; $-4 \to -4$; $3 \to 3$; $-1 \to -1$ car ce sont des suites constantes,
- $\frac{1}{n^2} \to 0$; $\frac{1}{n} \to 0$ et $\frac{1}{n^4} \to 0$ car $\forall p > 0, \frac{1}{n^p} \to 0$. Ici $p \in \{1,2,4\}, p > 0$.

Par les règles de calculs sur les limites de suites, on conclut que (remarquez que le dénominateur ne s'annule *pas*)

$$x_n \longrightarrow 0 \times \frac{1-4\cdot 0}{3+0-0} = 0.$$

- Pour la suite (y_n) :

  En mettant en évidence les termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(-1+\frac{(-1)^n}{n^2}+1/n^3\right)}{n^{1/2}\left(1+\frac{6}{n^{1/2}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} n^{5/2}\cdot\frac{-1+\frac{(-1)^n}{n^2}+1/n^3}{1+\frac{6}{n^{1/2}}}$$

On va analyser séparément la convergence de la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$, en montrant par convergence dominée que $\frac{(-1)^n}{n^2} \to 0$ (il est aussi possible de montrer cela via des sous-suites exhaustives). On a

$$\forall n > 0, \qquad \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{|(-1)^n|}{|n^2|} = \frac{1}{n^2}.$$

La dernière égalité est vraie car $n^2 > 0$ et car pour tout $n > 0$, $(-1)^n$ vaut soit -1, soit 1.

Comme la suite $(\frac{1}{n^2})$ converge vers 0 (car par un résultat du cours $\forall p > 0$, $\frac{1}{n^p} \to 0$, ici $p = 2 > 0$), la convergence dominée nous assure que la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ converge vers 0.

On a également que :

- $1 \to 1$; $6 \to 6$; $-1 \to -1$ car ce sont des suites constantes,
- $\frac{1}{n^3} \to 0$; $\frac{1}{n^{1/2}} \to 0$ car $\forall p > 0$, $\frac{1}{n^p} \to 0$. Ici $p \in \{1/2, 3\}$, $p > 0$.
- $n^{5/2} \to +\infty$ car $\forall p > 0$, $n^p \to +\infty$. Ici $p = 5/2 > 0$.

Par les règles de calculs sur les limites de suites, on conclut que (remarquez que le dénominateur ne s'annule *pas*)

$$y_n \longrightarrow +\infty \times \frac{-1+0+0}{1+6\cdot 0} = -\infty.$$

Car $a \times +\infty = -\infty$ si $a < 0$.

On aurait pu également résoudre cet exercice en prenant dès le départ deux sous-suites exhaustives de (y_n), mais la démarche aurait été un peu moins efficace. L'avantage de mettre les termes de plus haut degré en évidence tout de suite est qu'on voit bien que le terme en $(-1)^n$ n'aura « pas d'influence » sur la convergence de la suite.

Question 3. *Calculez les limites suivantes au sens large, si elles existent :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+\cos(\sqrt{x})}{(x^3+2x)^2} \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{2x+2x^2-12}{x-2}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

- Posons $f(x) = \frac{x^4+\cos(\sqrt{x})}{(x^3+2x)^2}$. Remarquez que $+\infty \notin \operatorname{adh}(\operatorname{Dom} f) = \mathbb{R}_0$, et cela est toujours vrai car l'adhérence d'un ensemble est définie comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Cependant, on a l'existence d'au moins une suite $(x_n) \subseteq \operatorname{Dom} f$ telle que $x_n \to +\infty$ (prendre par exemple $(x_n) = (n+1)$). Ceci justifie que la limite, si elle existe, est unique.

  En mettant en évidence les termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur on obtient (notez qu'il n'est pas nécessaire de développer le dénominateur) :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(1+\frac{\cos(\sqrt{x})}{x^4}\right)}{\left(x^3(1+2/x^2)\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(1+\frac{\cos(\sqrt{x})}{x^4}\right)}{x^6(1+2/x^2)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} \frac{\left(1+\frac{\cos(\sqrt{x})}{x^4}\right)}{(1+2/x^2)^2}$$

  On va calculer séparément la limite de la fonction $\frac{\cos(\sqrt{x})}{x^4}$, en montrant par le théorème du sandwich que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(\sqrt{x})}{x^4} = 0$. On a que pour tout $x \in \operatorname{Dom} f$,

$$-1 \le \cos(\sqrt{x}) \le 1 \iff \frac{-1}{x^4} \le \frac{\cos(\sqrt{x})}{x^4} \le \frac{1}{x^4}$$

  car $x^4 > 0$, quel que soit $x \in \operatorname{Dom} f$. Veillez à bien justifier vos inégalités, et surtout si elles impliquent des opérations plus compliquées (passage à l'inverse, division par un terme qui n'est pas clairement positif, *etc.*). Parfois les équivalences ne sont pas évidentes, et parfois elles sont mêmes fausses.

  On a que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4} = 0$ car un résultat du cours nous dit que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. En appliquant la règle du produit, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4} = 0$. Comme $\lim_{x\to+\infty} -1 = -1$, par règle du produit on obtient également que $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^4} = 0$.

  Par le théorème du sandwich, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(\sqrt{x})}{x^4} = 0$.

  On a également que :

  - $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et par règle du produit,
  - $\lim_{x\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} 2 = 2$.

  Par les règles de calculs sur les limites de fonctions, on conclut que (remarquez que le dénominateur ne s'annule *pas*)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \times \frac{1+0}{(1+2\cdot 0)^2} = 0.$$

- Posons $g(x) = \frac{2x+2x^2-12}{x-2}$. On a que $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, mais $2 \in \operatorname{adh}(\operatorname{Dom} g)$ car par exemple la suite $(2+\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ est incluse dans $\operatorname{Dom} g$ et converge vers 2. La limite, si elle existe, est donc unique.

Pour lever l'indétermination, on va factoriser le numérateur (par la méthode de votre choix) pour pouvoir ensuite le simplifier avec le dénominateur.

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x\to 2} 2(x+3).$$

Par les résultats du cours :

- $\lim_{x\to 2} 2 = 2$; $\lim_{x\to 2} 3 = 3$,
- $\lim_{x\to 2} x = 2$.

Donc les règles de calculs de la somme et du produit pour les limites de fonctions impliquent que :

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 2 \times (2+3) = 10.$$

Question 4. *On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^2 - 8 & si\ x \leqslant 1, \\ \mathrm{e}^{x-1} - 2\lambda & si\ x \in]1,3], \\ \lambda x & si\ x > 3, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. En discutant en fonction de λ si nécessaire, dites si f est dérivable au point $a = 1$ et continue en $a = 2\pi$. Justifiez toutes vos affirmations en identifiant clairement les différents résultats utilisés.

- Dérivabilité en 1 :
  On va essayer d'appliquer le théorème d'exhaustivité en 1. On choisit deux intervalles exhaustifs par rapport à 1, par exemple $A_1 =]-\infty, 1]$ et $A_2 =]1,3]$. Ces intervalles vérifient bien l'hypothèse du théorème d'exhaustivité car on a qu'il existe V un voisinage de 1 tel que $A_1 \cup A_2 \supseteq V \cap \mathrm{Dom}\, f$. En effet, en prenant par exemple $V = [1-1, 1+1] = [0,2]$, l'affirmation est vérifiée puisque

  - V est un voisinage de 1 : en effet, $V \supseteq V$ qui est un ensemble du type $[1-r, 1+r]$ avec $r > 0$. Ici $r = 1 > 0$.
  - $A_1 \cup A_2 =]-\infty, 3]$ et $V \cap \mathrm{Dom}\, f = V = [0,2]$ car $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$.
  - Clairement $[0,2] \subseteq]-\infty, 3]$ ce qui montre que $A_1 \cup A_2 \supseteq V \cap \mathrm{Dom}\, f$.

  On a

  $$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x\in A_1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\lambda x^2 - 8 - (\lambda - 8)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\lambda(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \lambda(x+1) = 2\lambda. \qquad (2)$$

  La première égalité est vraie car on s'est restreint à A_1, et dans ce sous-ensemble, $f(x) = \lambda x^2 - 8$. Il est important de justifier la dernière égalité ! On peut la justifier soit par les résultats standards sur les limites vus au cours (limites des fonctions usuelles — à citer — et règles de calculs), soit par continuité de la fonction $\lambda(x+1)$. Cette fonction est bien continue car la fonction x

est continue, ainsi que les fonctions constantes λ et 1, donc puisque la somme et le produit de fonctions continues sont continues, $\lambda(x+1)$ est continue et en particulier continue en 1.

On fait de même dans A_2 :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in A_2}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^{x-1} - 2\lambda - (\lambda - 8)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^{x-1} - 3\lambda + 8}{x-1}. \tag{3}$$

La première égalité est vraie car on s'est restreint à A_2, et dans ce sous-ensemble, $f(x) = \mathrm{e}^{x-1} - 2\lambda$. Remarquez que $f(1)$ est une valeur fixe donnée par $f(1) = \lambda - 8$.

Puisque la limite ne peut être calculée à ce stade, on va donc d'abord analyser la continuité de f en 1. En reprenant les mêmes ensembles A_1 et A_2 (qui sont toujours exhaustifs par rapport à 1),

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in A_1}} f(x) = \lim_{x\to 1} \lambda x^2 - 8 = \lambda - 8.$$

La dernière égalité est vérifiée car la fonction $\lambda x^2 - 8$ est continue comme somme et produit de fonctions continues (les fonctions constantes λ et -8 sont continues, et la fonction x^2 également). En particulier, cette fonction est continue en 1.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in A_2}} f(x) = \lim_{x\to 1} \mathrm{e}^{x-1} - 2\lambda = 1 - 2\lambda,$$

La dernière égalité est vérifiée car la fonction $\mathrm{e}^{x-1} - 2\lambda$ est continue comme composée et somme de fonctions continues (les fonctions e^x et x sont continues, ainsi que les fonctions constantes -2λ et -1). En particulier cette fonction est continue en 1.

Le théorème d'exhaustivité nous assure que la fonction est continue en 1 si et seulement si ces deux limites sont égales, ce qui est le cas si et seulement si $\lambda = 3$.

Par conséquent, si $\lambda \neq 3$, la fonction n'est pas continue en 1, ce qui implique qu'elle n'est pas dérivable en 1. Il reste à vérifier la dérivabilité en 1 quand $\lambda = 3$. Dans ce cas, (2) et (3) deviennent respectivement :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in A_1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2\cdot 3 = 6. \tag{4}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in A_2}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^{x-1} - 3.3 + 8}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^{x-1} - 1}{x-1} = \partial_x(\mathrm{e}^{x-1})_{|x=1} = 1. \tag{5}$$

L'avant dernière égalité de (5) se justifie par définition de la dérivée en 1 de la fonction e^{x-1} (cette fonction est bien dérivable comme composée et somme de fonctions dérivables, en effet, les fonctions e^x et x sont dérivables, ainsi que la fonction constante -1). La dernière égalité se justifie par les règles usuelles de dérivation vues au cours.

Comme les deux limites (4) et (5) sont différentes, la limite en 1 de $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ n'existe pas et la fonction n'est pas dérivable en 1, et cela quel que soit λ.

- Continuité en 2π :
  On utilise le théorème de localité avec un voisinage de 2π bien choisi, par exemple $V = [2\pi - 1,$

$2\pi+1]$. C'est bien un voisinage de 2π car il contient un ensemble de la forme $[2\pi-r, 2\pi+r]$, avec $r>0$. C'est évident puisque $V \supseteq V$ et $V=[2\pi-r,2\pi+r]$ avec $r=1>0$.

Le voisinage V est bien choisi pour calculer la limite car si $x \in V$, alors $x>\pi$. En effet si $x\in V$, $x>2\pi-1$. Mais $\pi>3$ implique $2\pi-1>5>\pi$.

Le théorème de localité implique donc :

$$\lim_{x\to 2\pi} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\pi\\ x\in V}} f(x) = \lim_{x\to 2\pi} \lambda x = \lambda 2\pi,$$

Chaque égalité doit être justifiée (aucune n'est triviale). La première est due au théorème de localité. La seconde est due au fait que si $x\in V$, alors $x>\pi$. Par conséquent, dans V, $f(x)=\lambda x$. La dernière égalité peut être justifiée soit par les résultats standards sur les limites vus au cours (limites des fonctions usuelles -à citer- et règles de calculs), soit par continuité de la fonction λx, produit de deux fonctions continues.

Cette limite existe pour tout λ et vaut $\lambda 2\pi = f(2\pi)$, par conséquent f est continue en 2π quelque soit λ.

Question 5. *Donnez le développement de Taylor d'ordre* 3 *en* 0 *de la fonction* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *définie par* $f(x)=\mathrm{e}^{x^2+x^3}$. *Justifiez vos calculs en citant (sans redémontrer) les règles de calcul sur les petits o. La qualité de votre rédaction est importante.*

Comme aucune méthode n'est requise, deux approches sont possibles.

PREMIÈRE APPROCHE. On a vu au cours un résultat qui donne une formule pour calculer le développement de Taylor d'ordre n d'une fonction f en un point a. Celle-ci dit que le développement de Taylor est le polynôme

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^i f(a)}{i!}(x-a)^i. \tag{6}$$

Dans le cas qui nous occupe, on a $n=3$ et $a=0$. La formule (6) devient

$$f(0)+\partial f(0)x+\frac{\partial^2 f(0)}{2}x^2+\frac{\partial^3 f(0)}{6}x^6. \tag{7}$$

Avant d'appliquer cette formule, il faut se rappeler qu'elle demande des hypothèses sur la fonction f à savoir $f\in\mathscr{C}^n$ sur un voisinage[1] de a. Ici, on a bien que $f\in\mathscr{C}^3(\mathbb{R})$ (et en fait $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ par composée de fonctions infiniment dérivables) et on peut donc appliquer (6). Calculons donc grâce aux règles de calculs des dérivées et, en particulier, de la règle de dérivation des fonctions composées,

$$\begin{aligned}
\partial f(x) &= \partial_x(\mathrm{e}^{x^2+x^3}) = \mathrm{e}^{x^2+x^3}\,\partial_x(x^2+x^3) = \mathrm{e}^{x^2+x^3}(2x+3x^2),\\
\partial^2 f(x) &= \partial_x\big(\mathrm{e}^{x^2+x^3}(2x+3x^2)\big) = \partial_x\big(\mathrm{e}^{x^2+x^3}\big)(2x+3x^2)+\mathrm{e}^{x^2+x^3}\,\partial_x(2x+3x^2)\\
&= \mathrm{e}^{x^2+x^3}(2x+3x^2)^2+\mathrm{e}^{x^2+x^3}(2+6x)\\
&= \mathrm{e}^{x^2+x^3}\big((2x+3x^2)^2+2+6x\big)\\
\partial^3 f(x) &= \mathrm{e}^{x^2+x^3}(2x+3x^2)\big((2x+3x^2)^2+2+6x\big)+\mathrm{e}^{x^2+x^3}\big(2(2x+3x^2)(2+6x)+6\big)
\end{aligned}$$

[1]L'hypothèse peut même être un rien affaiblie, voir les notes de cours.

(nous n'avons pas pris soin de réduire[2] la dernière expression puisque cela ne nous est pas utile pour l'évaluer en 0). En substituant x par 0, on obtient

$$\begin{aligned} f(0) &= e^0 = 1, \\ \partial f(0) &= 0, \\ \partial^2 f(0) &= 2, \\ \partial^3 f(0) &= 6. \end{aligned}$$

En remplaçant dans (7), on trouve finalement que le développement de Taylor recherché est

$$1 + 0x + \frac{2}{2}x^2 + \frac{6}{6}x^3 = 1 + x^2 + x^3.$$

SECONDE APPROCHE. Cette approche utilise le fait que le développement de Taylor d'ordre n d'une fonction f en un point a est l'unique polynôme p de degré $\leqslant n$ tel que

$$f(x) = p(x) + o(x-a)^n \qquad \text{quand } x \to a. \tag{8}$$

Le cas qui nous occupe est $n = 3$ et $a = 0$. Nous voulons donc trouver $p \in \mathbb{P}^{\leqslant 3}$ tel que

$$f(x) = e^{x^2+x^3} = p(x) + o(x^3). \tag{9}$$

Pour ce faire, commençons par nous rappeler le développement de Taylor de l'exponentielle (vu au cours mais peut se montrer rapidement grâce à (7)) :

$$e^y = 1 + y + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{6}y^3 + o(y^3), \qquad \text{quand } y \to 0.$$

En substituant y par $x^2 + x^3$, on a

$$e^{x^2+x^3} = 1 + x^2 + x^3 + \tfrac{1}{2}\big(x^2+x^3\big)^2 + \tfrac{1}{6}\big(x^2+x^3\big)^3 + o\big(\big(x^2+x^3\big)^3\big) \tag{10}$$

Tout d'abord, remarquons que

$$\begin{aligned} o\big(\big(x^2+x^3\big)^3\big) &= o(1)\big(x^2+x^3\big)^3 && \text{(car } o(h(x)) = o(1)h(x)\text{)} \\ &= o(1)x^6(1+x)^3 \\ &= o(1)\,o(x^3)(1+x)^3 && \text{(car } x^m = o(x^n) \text{ si } m > n\text{)} \\ &= o(1)\,o(x^3) && \text{(car } o(x^n)h(x) = o(x^n) \text{ si } h \text{ est continue en 0)} \\ &= o(x^3) && \text{(car } o(1)\,o(x^n) = o(x^n)\text{).} \end{aligned}$$

En développant (10), on obtient[3]

$$e^{x^2+x^3} = 1 + x^2 + x^3 + \tfrac{1}{2}x^4 + x^5 + \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{2}x^7 + \tfrac{1}{2}x^8 + \tfrac{1}{6}x^9 + o(x^3)$$

En utilisant le fait que $cx^m = o(x^n)$ pour $c \in \mathbb{R}$ et $m > n$ et que la somme de $o(x^n)$ est un $o(x^n)$, on obtient

$$e^{x^2+x^3} = 1 + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

ce qui implique (au vu de (9)) que le développement de Taylor demandé est $1 + x^2 + x^3$.

[2]Il est cependant essentiel de bien connaître la priorité des opérations arithmétiques et de mettre des parenthèses où cela s'impose. Nombre d'entre vous ne l'ont pas fait ce qui a au final engendré des erreurs de calcul (et, de plus, le bon parenthèsage des expressions est essentiel pour pouvoir les entrer correctement dans un programme informatique).

[3]En se rappelant les produits remarquables $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ qui semblent bien peu connus...

REMARQUES

- Dans l'égalité (8), le « $o(x-a)^3$ » est *essentiel*. Sans lui, l'égalité est en général totalement fausse !
- Il n'est *pas* nécessaire de calculer le développement de Taylor de $x^2 + x^3$ car c'est déjà un polynôme.
- On ne peut affirmer que le développement de Taylor de $x^2 + x^3$ est lui-même uniquement en disant « parce que c'est un polynôme ». Il faut aussi tenir compte de l'ordre et du point ! En effet, quel est le développement de Taylor de $x^2 + x^3$ en $x = 0$ d'ordre 2 ? Et quel est le développement de Taylor de $x^2 + x^3$ en $x = 1$ d'ordre 3 ? Dans le cas qui nous occupe, on a

  $$x^2 + x^3 = x^2 + x^3 + o(x^3) \qquad \text{quand } x \to 0$$

  puisque $0 = o(x^3)$. Au vu de (8), $x^2 + x^3$ est donc le développement de Taylor de $x^2 + x^3$ en $x = 0$ d'ordre 3. Inutile d'utiliser (7) pour le recalculer ! (Le faire n'est pas logiquement faux mais témoigne d'une compréhension superficielle du sujet.)
- On aurait pu se contenter de prendre le développement de Taylor de l'exponentielle à l'ordre 2 : $e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$ (poursuivez le calcul !). Nous ne l'avons pas fait car la majorité d'entre vous n'a pas vu cela et nous avons voulu montrer que les calculs n'étaient qu'un peu plus longs si on ne le remarquait pas.

Question 6.

(a) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Définissez « f est strictement décroissante ».*

Une fonction f est dite strictement décroissante (sous entendu « sur son domaine ») si

$$\forall x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \tag{11}$$

REMARQUE : La propriété $\forall x,\ f(x) > f(x+1)$ n'est *pas* une définition équivalente de décroissance stricte. C'est le cas uniquement pour les suites (pouvez-vous le prouver ?). Pour les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, cette définition est strictement plus faible que (11) (c'est-à-dire que (11) $\Rightarrow \forall x,\ f(x) > f(x+1)$ mais qu'on n'a *pas* l'implication réciproque).

(b) *Énoncez le théorème de la moyenne et donnez en une interprétation géométrique. Vous devez faire* explicitement *le lien entre l'énoncé et le graphique.*

L'énoncé du théorème de la moyenne (du syllabus) est le suivant.

> Soient $a \neq b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe un $\xi \in\,]a,b[$ tel que
>
> $$f(b) - f(a) = \partial f(\xi)(b-a). \tag{12}$$

L'illustration se trouve à la figure 1. Elle doit s'interpréter comme suit : il existe une abscisse ξ entre a et b telle que la tangente au graphe de f au point $(\xi, f(\xi))$ est parallèle à la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Les équations de ces deux droites sont rappelées sur la figure 1. Cette interprétation est bien ce que le théorème dit parce que le parallélisme des deux droites est équivalent à l'égalité des pentes et

- $\partial f(\xi)$ est par définition la pente de la tangente au graphe de f en $(\xi, f(\xi))$;
- la pente de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est (revu au cours de Mathématiques Élémentaires)
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Comme (12) peut se réécrire $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \partial f(\xi)$, ce théorème exprime bien le parallélisme des deux droites ci-dessus.

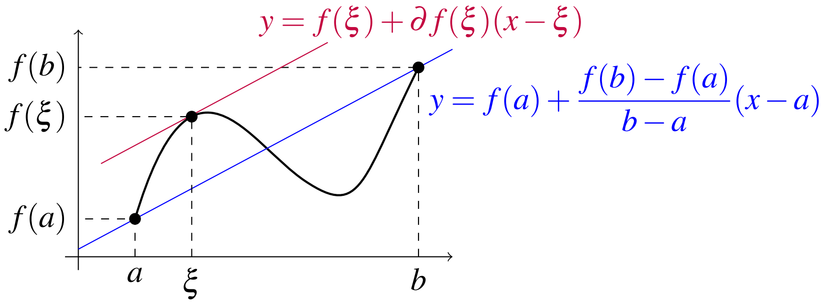

FIGURE 1 – Théorème de la moyenne

Question 7. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Montrez que si f n'est pas constante, alors il existe nécessairement au moins un $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\partial f(\gamma) \neq 0$. Expliquez votre démarche.* Indication : *La question 6 peut vous être utile.*

Soit f une fonction non-constante. Argumentons par contradiction et supposons au contraire que la thèse n'est pas vérifiée, à savoir : $\forall \gamma \in \mathbb{R},\ \partial f(\gamma) = 0$. On a vu au cours que cela impliquait que f est constante, ce qui donne la contradiction recherchée.

Montrons cette dernière implication : soient $x_1 \neq x_2$ deux réels arbitraires[4] et prouvons que $f(x_1) = f(x_2)$. Puisque $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, elle est en particulier continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$. On peut donc appliquer le théorème de la moyenne (voir question 6) et on obtient l'existence d'un $\xi \in]x_1, x_2[$ tel que
$$f(x_2) - f(x_1) = \partial f(\xi)(x_2 - x_1).$$
Comme la dérivée est nulle partout, on a en particulier que $\partial f(\xi) = 0$ et donc que $f(x_2) - f(x_1) = 0$, ce qu'on voulait démontrer.

[4]On n'a pas besoin de regarder le cas $x_1 = x_2$ puisque dans ce cas il est évident que $f(x_1) = f(x_2)$ (on prend l'image par f de la même valeur !).

Question 8. *Supposons que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez vos réponses par une preuve ou un contre-exemple.*

(a) Vrai : ☑ *Faux :* ☐ *Si f est strictement décroissante, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) \leqslant 0$.*

(b) Vrai : ☑ *Faux :* ☐ *Si $\forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) < 0$, alors f est strictement décroissante.*

(c) Vrai : ☐ *Faux :* ☑ *Si f est strictement décroissante, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) < 0$.*

(a) Sous l'hypothèse de décroissance stricte de f (dont la définition formelle est rappelée à la question 6, équation (11)), on doit montrer que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leqslant 0.$$

Cette limite existe forcément puisqu'on a supposé que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et donc en particulier f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. Puisque cette limite existe, la même limite avec une contrainte additionnelle existe aussi et vaut la même valeur. En particulier, on a

$$\partial f(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Pour les $t \in \mathbb{R}$ tels que $t > x$, la décroissance de f implique qu'on aie $f(t) < f(x)$ ou encore $f(t) - f(x) < 0$. Donc

$$\forall t > x, \quad \frac{f(t) - f(x)}{t - x} < 0.$$

En passant à la limite lorsque $t \to x$, on obtient bien

$$\partial f(x) = \lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leqslant 0.$$

REMARQUES.

- On aurait pu prendre la contrainte $t < x$ et obtenir le même résultat. Il est inutile (mais pas logiquement faux) de faire les deux cas.
- Il faut se rappeler qu'une inégalité stricte peut, après passage à la limite sur ses deux membres, devenir large. Plus précisément, si g et h sont deux fonctions définies sur un voisinage V d'un point $a \in \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in V,\ g(x) < h(x)$ et que $\lim_{x \to a} g(x)$ et $\lim_{x \to a} h(x)$ existent, alors on peut seulement en déduire que $\lim_{x \to a} g(x) \leqslant \lim_{x \to a} h(x)$ mais *en général pas* que $\lim_{x \to a} g(x) < \lim_{x \to a} h(x)$. Pouvez-vous trouver un tel exemple ?
- Une fonction strictement décroissante, comme par exemple $f(x) = -x$, pour laquelle on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) < 0$ n'est *pas* un contre-exemple. En effet $\forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) < 0$ est plus fort que ce qu'il faut montrer, cela *implique* $\forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) \leqslant 0$.

(b) Supposons que f vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) < 0$. On doit établir (11). Soient donc $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$ et montrons que

$$f(x_1) > f(x_2). \tag{13}$$

Comme $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, on a en particulier que f est continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$. On peut donc appliquer le théorème de la moyenne (rappelé à la question 6) et celui-ci nous dit qu'il existe un $\xi \in]x_1, x_2[$ tel que

$$f(x_2) - f(x_1) = \partial f(\xi)(x_2 - x_1). \tag{14}$$

L'hypothèse $\forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) < 0$ particularisée au cas $x = \xi$ nous donne $\partial f(\xi) < 0$. Par ailleurs, vu que $x_1 < x_2$, on a $x_2 - x_1 > 0$. L'égalité (14) implique alors que $f(x_2) - f(x_1) < 0$ c'est-à-dire (13).

REMARQUE : La fonction $f(x) = 1/x$ n'est *pas* un contre-exemple à l'affirmation de ce point. On a bien que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (dans le domaine de f), $\partial f(x) = -1/x^2 < 0$ et que pourtant f n'est pas décroissante (et donc, a fortiori, pas strictement décroissante). Cependant, cette fonction f ne vérifie pas l'hypothèse $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ puisqu'elle n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}$. Au final, cet exemple sert surtout à insister sur le fait que l'implication (b) est valable *à condition* qu'on l'applique sur un intervalle de $\mathbb{R}$ (éventuellement non-borné) sur lequel f est partout définie.

(c) Donnons un contre-exemple, c'est-à-dire une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ qui soit strictement décroissante mais qui ne vérifie *pas* $\forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) < 0$. Autrement dit, on veut une fonction strictement décroissante $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ qui vérifie la négation de la thèse, à savoir $\exists x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) \geqslant 0$. Prenons $f(x) = -x^3$. Cette fonction possède bien une dérivée continue sur $\mathbb{R}$ et est strictement décroissante.[5] Cette fonction vérifie aussi $\exists x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) \geqslant 0$. Il suffit en effet de prendre $x = 0$ et de constater que $\partial f(0) = -3x^2\big|_{x=0} = 0 \geqslant 0$.

Question 9.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par

$$x_n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - 5}\right)^n$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Étudiez la convergence au sens large de (x_n) en fonction de λ. Lorsque (x_n) converge, donnez la valeur de sa limite.

On commence par se rappeler que pour $a \in \mathbb{R}$, on a le résultat de convergence suivant pour (a^n) :

$a^n \to +\infty$	ssi $a > 1$,
$a^n \to 1$	ssi $a = 1$,
$a^n \to 0$	ssi $-1 < a < 1$,
(a^n) ne converge pas	ssi $a \leqslant -1$.

Appliqué à la suite de l'énoncé, ça donne les résultats suivants.

[5] On peut prouver cette stricte décroissance directement à partir des règles de base sur les inégalités revues en « Mathématiques Élémentaires » (le pouvez-vous ?) mais on a déjà mentionné plusieurs fois que $x \mapsto x^3$ est strictement croissante au cours et on peut donc prendre ce fait pour acquis.

- $x_n \to +\infty$ ssi $\lambda/(\lambda-5) > 1$. Pour résoudre cette inéquation, distinguons deux cas.
  - Si $\lambda > 5$, elle est équivalente à $\lambda > \lambda - 5$, c'est-à-dire $0 > -5$ qui est toujours vérifié. Tous les $\lambda > 5$ sont donc des solutions.
  - Si $\lambda - 5 < 0$, elle est équivalente à $\lambda < \lambda - 5$, c'est-à-dire $0 < -5$ qui n'est jamais vérifié. L'inéquation n'a donc pas de solution dans ce cas.

  Au final, en faisant l'union des ensembles de solutions trouvés dans chaque cas, on a que

$$x_n \to +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda > 5.$$

- $x_n \to 1$ ssi $\lambda/(\lambda-5) = 1$, c'est-à-dire ssi $\lambda = \lambda - 5$ ou encore $0 = -5$. Ce n'est jamais vérifié et il n'y a donc aucun λ qui donne la convergence de (x_n) vers 1.
- $x_n \to 0$ ssi $-1 < \lambda/(\lambda-5) < 1$ (voulant dire que les inégalités doivent vérifiées *toutes les deux*). Comme ci-dessus, distinguons deux cas.
  - Si $\lambda > 5$, ces inégalités deviennent $-(\lambda-5) < \lambda < \lambda - 5$ ou encore $-2\lambda+5 < 0 < -5$. Aucun λ ne satisfait la seconde inégalité. Il n'y a donc pas de solution.[6]
  - Si $\lambda < 5$, ces inégalités deviennent $-(\lambda-5) > \lambda > \lambda - 5$ ou encore $-2\lambda+5 > 0 > -5$. La seconde inégalité est toujours satisfaite et la première l'est ssi $\lambda < 5/2$.

  En conclusion, on a établi que

$$x_n \to 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda < 5/2.$$

- La suite (x_n) diverge si $\lambda/(\lambda-5) \leqslant -1$, c'est-à-dire si $\lambda \in [5/2, 5[$. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de résoudre l'inéquation si on comprend que la suite diverge dans les autres cas que ceux qui ont été traités avant. La résoudre n'est en rien une faute mais il ne faut pas oublier que multiplier les deux membres d'une inégalité par $\lambda - 5$ nécessite de discuter sur le signe de cette expression pour savoir si le sens de l'inégalité est conservé ou non. Dans cette question, vous avez été nombreux à ne pas prendre en compte le signe de cette expression dans la résolution des inéquations et quand vous le faites, vous omettez d'expliquer comment vous regroupez tous les cas traités.

On peut résumer les conclusions des déductions précédentes comme :

$$\begin{array}{ll} x_n \to +\infty & \text{si } \lambda > 5, \\ x_n \to 0 & \text{si } \lambda < 5/2, \\ (x_n) \text{ ne converge pas} & \text{si } \lambda \in [5/2, 5[. \end{array}$$

(Nous n'avons pas repris la valeur $\lambda = 5$ dans ce résumé parce que la suite n'est pas définie dans ce cas.)

[6] On aurait pu être plus malin et dire que, pour $\lambda > 5$, on a déjà établi que $x_n \to +\infty$ et que par conséquent il n'y a plus lieu d'examiner ces valeurs de λ pour la concergence $x_n \to 0$.

Question 10. *Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case appropriée selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse par un bref argument (rigoureux) ou un contre-exemple.* La qualité de vos justifications est importante.

(a) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ est strictement décroissante car $\forall x \in \operatorname{Dom} f,\ \partial f(x) = -1/x^2 < 0$.*

La fonction f n'est *pas* strictement décroissante (vu qu'on a $-1 < 1$ et $f(-1) < f(1)$, ce qui contredit (11)) et aucune (tentative de) justification ne peut donc rendre cette affirmation vraie.

REMARQUE : Vous avez été très nombreux à penser que cette affirmation est vraie en argumentant que si la dérivée est strictement négative alors la fonction est strictement décroissante. Les résultats donnés dans le syllabus (et qui ont été étudiés au cours) sur les liens entre le signe de la dérivée et la croissance de la fonction reposent sur des hypothèses sur la fonction f (elle doit être définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, éventuellement non borné) qui ne sont pas vérifiées ici (voyez-vous pourquoi ?). Rappelons qu'il est important, lorsqu'on veut appliquer un résultat du cours, de ne pas se contenter d'utiliser la conclusion. Il faut également se préoccuper de savoir si les hypothèses sont vérifiées ou pas.

(b) *Vrai :* ☐ *Faux :* ☑ *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et V un voisinage de 0. Alors $f(V) := \{f(x) \mid x \in V\}$ est un voisinage de $f(0)$.*

Tout d'abord rappelons qu'un ensemble $W \subseteq \mathbb{R}$ est un voisinage de 0 si et seulement s'il existe un $r > 0$ tel que $[-r, r] \subset W$. Si on préfère, en écriture symbolique,[7]

$$W \text{ est un voisinage de } 0 \quad \iff \quad \exists r > 0,\ [-r, r] \subseteq W. \tag{15}$$

Exhibons maintenant un contre-exemple à l'affirmation c'est-à-dire une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un voisinage V de 0 telle que $f(V)$ ne soit pas un voisinage de 0. Prenons f le fonction constante 1 (on a vu au cours que les fonctions constantes sont continues) et $V = \mathbb{R}$ (qui est bien un voisinage de 0 car, par exemple, $[-1, 1] \subseteq V$). Comme $f(x) = 1$ quel que soit $x \in V$, on a que $f(V) = \{1\}$ (le singleton qui ne contient que 1). Ce dernier ne peut être un voisinage de $f(0) = 1$ car, si c'était le cas, on aurait que, pour un certain $r > 0$,

$$[f(0) - r, f(0) + r] = [1 - r, 1 + r] \subseteq f(V) = \{1\}.$$

Ce ne peut être le cas car, par exemple, $1 + r \in [1 - r, 1 + r]$ et on aurait donc $1 + r \in \{1\}$ ou encore $1 + r = 1$ ce qui n'est pas vrai puisque $r \neq 0$.

[7] Ne dites pas « écriture mathématique », les explications en (bon) français ne sont pas moins mathématiques !