Calculus I

Examen (10 juin 2022)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres MAJUSCULES votre *nom*, *prénom* et *section* (MATH ou INFO) sur *toutes* les feuilles.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM,...) n'est autorisé. Votre GSM doit être en mode silencieux.
- L'examen dure 4 heures.
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Question 1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $a\in\operatorname{Dom} f$. Posons $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto f(x+a)$. En utilisant la définition en termes de suites de la continuité (à rappeler), montrez que si f est continue en a, alors g est continue en 0. $/3$

Nom :
Prénom :
Section :

/4

Question 2. Calculez, si elles existent, les limites suivantes au sens large des suites de termes génériques :

$$x_n = \frac{\sqrt{n^3} - 4\cos(n)}{-n^2 + 3n} \qquad\qquad y_n = \frac{1 + (-1)^n \sin(5n) + n}{2n - 2}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Calculez les limites suivantes au sens large, si elles existent :

/4

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x^2+3x-2}{3x+6}. \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^5-\sin(x^2)-4x}{2(1-x^3)(x^2+1)}$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Calculus I

Examen (10 juin 2022)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

/4

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leqslant -1, \\ e^{\lambda x+1} & \text{si } x \in \left]-1,2\right[, \\ \lambda x^2 - 2\lambda x + 1 & \text{si } x \geqslant 2, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. En discutant en fonction de λ si nécessaire, dites si f est continue en $a = -2$ et dérivable au point $a = 2$. Justifiez toutes vos affirmations en identifiant clairement les différents résultats utilisés.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en 0 de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x^3 + \pi) + e^x$. Justifiez vos calculs en citant (sans redémontrer) les règles de calcul sur les petits o. La qualité de votre rédaction est importante. $/4$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application et $a \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $m, p \in \mathbb{R}$ tels que $m > 0$ et $f(x) = mx + p + \mathrm{o}(x + p/m)$. /4

(a) Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$. Définissez « g est un $\mathrm{o}(x - x_0)$ ».

Montrez ensuite que

(b) $x_0 := -p/m$ est une racine de f.

(c) il existe un $r > 0$ tel que $\forall x \in \left]x_0, x_0 + r\right[,\ f(x) > 0$ où $x_0 := -p/m$.

Calculus I

Examen (10 juin 2022)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 7. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez vos réponses par une preuve ou un contre-exemple explicite. /5

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ existe, alors f est continue en a.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est strictement croissante partout sauf en 0 car $\partial f(0) = 0$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Le développement de Taylor d'ordre 2 de la fonction $f(x) = x^2 - 1$ en $x = 1$ est $x^2 - 1$ car c'est un polynôme de degré $\leqslant 2$. *Contrainte :* Quelle que soit la case que vous avez cochée, votre justification doit utiliser la définition du développement de Taylor (et pas les théorèmes prouvés à ce propos).

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 8. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par

/5

$$x_n = \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+2}\right)^n$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Étudiez la convergence au sens large de (x_n) en fonction de λ. Lorsque (x_n) converge, donnez la valeur de sa limite.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/4

Question 9. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case appropriée selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse par un bref argument (rigoureux) ou un contre-exemple. *La qualité de vos justifications est importante.*

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application et $a \in \mathbb{R}$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{tg}(x)$ est strictement croissante car sa dérivée $\partial f(x) = 1/(1+x^2)$ est strictement positive pour tout $x \in \operatorname{Dom} f$.