Calculus I

Examen (20 août 2022)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres MAJUSCULES votre *nom*, *prénom* et *section* (MATH ou INFO) sur *toutes* les feuilles.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM,...) n'est autorisé. Votre GSM doit être en mode silencieux dans votre cartable.
- L'examen dure 4 heures.
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Question 1. En utilisant le théorème de la moyenne dont vous rappellerez l'énoncé, démontrez que si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) = 0$, alors f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. /3

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 2. Calculez, si elles existent, les limites suivantes au sens large des suites de termes génériques :

$$x_n = \frac{n^3 + 2n}{\sin(n) + n^2}, \qquad y_n = \frac{\sin(5n) + (-1)^n}{-3n(2 + \cos(n))}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Calculus I

Examen (20 août 2022)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. Calculez les limites suivantes au sens large, si elles existent : /4

$$\lim_{x\to 1} \frac{-x^2-x+2}{|1-x|} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{-3x^4-x^2+4x}{4x^4+5}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/4

Question 4. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^4 + 2x - 1 & \text{si } x < 1, \\ x^2 + 2\lambda x + 3 & \text{si } x \in [1,4[, \\ \sin(x+2) & \text{si } x \geqslant 4, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. En discutant en fonction de λ si nécessaire, dites si f est continue en $a = 3$ et dérivable au point $a = 1$. Justifiez toutes vos affirmations en identifiant clairement les différents résultats utilisés.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en 0 de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \big(\cos(x)\big)^3 + e^x$. Justifiez vos calculs en citant (sans redémontrer) les règles de calcul sur les petits o. La qualité de votre rédaction est importante. /4

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point a de son domaine.

(a) Rappelez la définition de dérivabilité de f en un point a en termes de petit-o (donc, pas celle qui fait intervenir le quotient différentiel).

On rappelle que a est une *racine simple* de f si $f(a) = 0$ et $\partial f(a) \neq 0$.

(b) Montrez que si a est une racine simple de f, alors il existe un $r > 0$ tel que $\forall x \in [a - r, a + r]$, $f(x) \neq 0$.

Calculus I

Examen (20 août 2022)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez vos réponses par une preuve ou un contre-exemple explicite.

/5

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ existent et sont égales, alors f est continue en a.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ n'est pas continue car ses limites à gauche et à droite de $x = 0$ ne sont pas égales.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Le développement de Taylor d'ordre 2 de la fonction $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ en $x = 1$ est $x^2 - 1$ car c'est le morceau de degré $\leqslant 2$ du polynôme $x^3 + x^2 - 1$.
Contrainte : Quelle que soit la case que vous avez cochée, votre justification doit utiliser la définition du développement de Taylor (et pas les théorèmes prouvés à ce propos).

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par

/5

$$x_n = \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda - 6}\right)^n$$

où λ est un paramètre réel. Étudiez la convergence au sens large de (x_n) en fonction de λ. Lorsque (x_n) converge, donnez la valeur de sa limite.

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 9. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case appropriée selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse par un bref argument (rigoureux)[1] ou un contre-exemple. *La qualité de vos justifications est importante.*

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Si f est décroissante sur $]-\infty, 0[$ ainsi que sur $]0, +\infty[$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \operatorname{Dom} f$. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, alors elle vaut nécessairement $f(a)$.

[1] Il va de soi que la simple mention « vu au cours » n'est pas un argument recevable. Des détails sont nécessaires !