# Calculus I

## Examen (12 janvier 2023)

Nom :

Prénom :

Section :

**Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.** Leur non respect sera pénalisé.

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres MAJUSCULES votre *nom*, *prénom* et *section* (MATH ou INFO) sur *toutes* les feuilles.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM,...) n'est autorisé. Votre GSM doit être en mode silencieux dans votre cartable.
- L'examen dure 4 heures.
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !

---

Question 1. Énoncez le théorème de la moyenne. Interprétez-le géométriquement en veillant à faire un lien explicite et argumenté entre l'énoncé et les objets géométriques. /3

| Nom : |
| --- |
| Prénom : |
| Section : |

**Question 2.** Calculez, si elles existent, les limites suivantes au sens large des suites de terme général

/4

$$x_n = \frac{n(-2)^n}{n!\,\sqrt{n^3+n+1}} \qquad \text{et} \qquad y_n = \frac{3n^2+\cos(n\pi)n^3+4n}{n^3+n^2(-1)^n}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3.

/5

(a) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \operatorname{Dom} f$. Définissez

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée :

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ :

$a$ est un point minimum de $f$ :

(b) Donnez un exemple d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non bornée qui possède une sous-suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant au sens strict. Le fait que votre exemple satisfasse ce qui est demandé doit être rigoureusement établi.

(c) Donnez un exemple d'une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que $\partial f(0) = 0$ et pour laquelle $0$ n'est ni un point maximum, ni un point minimum. Le fait que votre exemple satisfasse ce qui est demandé doit être rigoureusement établi.

Calculus I

Examen (12 janvier 2023)

| | |
|---|---|
| Nom : | |
| Prénom : | |
| Section : | |

Question 4.

/6

(a) Soient $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \operatorname{adh} E$ et $b \in \mathbb{R}$. Définissez $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x) = b$.

(b) Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \operatorname{adh} B$ et $b \in \mathbb{R}$. Supposons que $B \subseteq A$.

(i) Montrez que $a \in \operatorname{adh} A$.

(ii) En utilisant la définition donnée au point (a), montrez que si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$ alors on a $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) = b$.

(iii) La réciproque de cette implication est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Calculez, si elles existent, les limites suivantes au sens large :

/4

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^4 - x^2 \sin(\frac{1}{x}) + x + 1}{(2x^2 - 1)^3}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

**Question 6.** On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

/4

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x - \lambda^2 & \text{si } x < -2, \\ \sin(\pi x) - \lambda + 1 & \text{si } x \in [-2, -1], \\ 2x^2 + \lambda x - 1 & \text{si } x > -1, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. En discutant en fonction de $\lambda$ si nécessaire, dites si $f$ est dérivable au point $a = -1$ et continue sur l'intervalle $]-\infty, -2[$. Justifiez toutes vos affirmations en identifiant clairement les différents résultats utilisés.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Calculus I

Examen (12 janvier 2023)

| Nom : |
| --- |
| Prénom : |
| Section : |

Question 7. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse par un bref argument rigoureux ou un contre-exemple (en établissant explicitement que ce dernier invalide la proposition). Une affirmation telle que « vu au cours » n'est pas une justification suffisante.

/4

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $f$ est une fonction strictement décroissante, alors $\forall x \in \mathbb{R}, \partial f(x) < 0$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $\forall x \in \mathbb{R}, \partial f(x) < 0$, alors $f$ est une fonction strictement décroissante.

Calculus I

Examen (12 janvier 2023)

| | |
|---|---|
| Nom : | |
| Prénom : | |
| Section : | |

Question 8. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en 0 de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{\cosh(x^2+x)} + x^4 + 2x^3$. Justifiez vos calculs en citant (sans démonstration) les règles de calcul sur les petits o. La qualité de votre rédaction est importante.
Rappel : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$.

/4

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.