Calculus I

Examen (17 août 2023)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen. Leur non respect sera pénalisé.

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres MAJUSCULES votre *nom*, *prénom* et *section* (MATH ou INFO) sur *toutes* les feuilles.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM,...) n'est autorisé. Votre GSM doit être en mode silencieux dans votre cartable.
- L'examen dure 4 heures.
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !

Question 1. Énoncez le théorème de la moyenne. Interprétez-le géométriquement en veillant à faire un lien explicite et argumenté entre l'énoncé et les objets géométriques. $/3$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Calculez, si elles existent, les limites suivantes au sens large des suites de terme général

$$x_n = \frac{-n^3\cos(n^3) - 2n + 4}{-n^3 + 2n^4 + 1} \qquad \text{et} \qquad y_n = \frac{n! + 2^{2n}}{n! + 1}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

/4

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/4

Question 3. Calculez, si elles existent, les limites suivantes au sens large :

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2x^3 + 5x^2 - 4x - 3}{2x + 1} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + x}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Calculus I

Examen (17 août 2023)

Nom :
Prénom :
Section :

/4

Question 4. On considère l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1+\lambda x}{x+1} & \text{si } x<-\pi,\\ \lambda^2\cos(x)+\lambda\sin(x) & \text{si } x\in[-\pi,\pi],\\ -x^2-2x\sin(x)+\pi^2-\lambda & \text{si } x>\pi,\end{cases}$$

où $\lambda\in\mathbb{R}$. En discutant en fonction de λ si nécessaire, dites si f est dérivable au point $a=\pi$ et continue en -10. Justifiez toutes vos affirmations en identifiant clairement les différents résultats utilisés.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Calculus I

Examen (17 août 2023)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. $/4$

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $A \subseteq \operatorname{adh} A$;

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\operatorname{adh} A \subseteq A$.

Justifiez vos réponses par un raisonnement (dont les différentes étapes sont détaillées) ou par un contre-exemple détaillé. Veuillez rappeler la définition d'adhérence que vous utilisez. Une affirmation telle que « vu au cours » n'est pas suffisante.

Calculus I

Examen (17 août 2023)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse rigoureusement. Une affirmation telle que « vu au cours » n'est pas une justification suffisante.

/4

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ n'est pas continue car

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty \neq +\infty = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x).$$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit une $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \neq 0$, $\partial f(x) = 0$. Alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Calculus I

Examen (17 août 2023)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 7. Donnez le développement de Taylor d'ordre 3 en 0 de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\sin\left(\sinh\left(\frac{1}{x^2+1}-x^3+x-1\right)\right)$. Justifiez vos calculs en citant (sans démonstration) les règles de calcul sur les petits o. La qualité de votre rédaction est importante. $/4$

Rappel : pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.