

# Calculus II

Examen (10 août 2022)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

**Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.**

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres MAJUSCULES votre *nom*, *prénom* et *section* (MATH, INFO) sur *toutes* les feuilles.
- L'examen dure 3 heures.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM,...) n'est autorisé. Votre GSM doit être en mode silencieux dans votre cartable.
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos calculs et vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

---

Question 1. Calculez l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$  en détaillant justifiant les différentes étapes qui mènent à votre réponse.

/3

# Calculus II

Examen (10 août 2022)

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 2. Calculez l'intégrale  $\int_{-1}^{-1/2} \frac{5x^2 + 5x + 1}{2x^3 + 2x^2 + 2x} dx$  en détaillant et justifiant les différentes étapes de vos calculs.

/4

# Calculus II

Examen (10 août 2022)

---

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 3.

/6

(a) Déterminez l'ensemble des solutions réelles de l'EDO suivante :

$$\partial_t^2 u(t) + 9u(t) = \cos(t) + t. \tag{1}$$

(b) Existe-t-il une solution de l'équation (1) vérifiant  $u(0) = 0$  et  $\partial_t u(0) = 1$  ? Justifiez.

# Calculus II

Examen (10 août 2022)

---

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 3 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4. Déterminez la solution réelle  $u : I \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$  du problème de Cauchy

/4

$$\partial_t u(t) = 1 - (u(t))^2, \quad u(0) = u_0,$$

où  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $I$  est aussi grand que possible. Donnez  $u$  sous la forme d'une seule formule (qui peut dépendre de  $u_0$ ) :

$u(t) =$

$I =$

Il est important de détailler et justifier rigoureusement les calculs qui donnent lieu à votre solution.

# Calculus II

Examen (10 août 2022)

---

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. Soit  $P$  un polynôme à coefficients complexes et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Montrez que l'ensemble des solutions  $\{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid P(\partial_t)u = f\}$  peut s'écrire sous la forme  $u^* + \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid P(\partial_t)u = 0\}$  où  $u^*$  est une solution particulière. La notion de « solution particulière » ainsi que la définition du « + » dans l'écriture précédente doivent être rappelés. Veillez à la qualité de vos justifications.

/3



Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6. Un étudiant vous demande de l'aide. Il essaye de résoudre le problème de Cauchy  $\partial_t u = u^{1/5}$ ,  $u(0) = 0$ . La fonction constante nulle est clairement une solution dit-il. Mais après quelques recherches, il a également trouvé la solution

/4

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ -\left(\frac{4}{5}t\right)^{5/4} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Or ceci contredit le théorème d'existence et d'unicité des solutions, ce qui le laisse perplexe. A-t-il raison? Les deux fonctions qu'il donne sont-elles bien des solutions? Y a-t-il un problème avec le théorème d'existence et d'unicité? Justifiez vos explications, notamment grâce aux résultats vus au cours. La qualité de votre rédaction est importante.