Calculus II

Examen (25 août 2023)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres MAJUSCULES votre *nom*, *prénom* et *section* (MATH, INFO) sur *toutes* les feuilles.
- L'examen dure 3 heures.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM,...) n'est autorisé. Votre GSM doit être en mode silencieux dans votre cartable.
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos calculs et vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Faites également attention à ne *pas* finir votre réponse sur la feuille d'une *autre question* !

Le non respect de ces consignes sera pénalisé.

Question 1. Calculez l'intégrale $\int_0^{\pi} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$ en détaillant et justifiant les différentes étapes de votre raisonnement. $/3$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Calculez l'intégrale $\int_{-4}^{-3} \frac{-x^2-8}{x^3+4x^2+4x}\,\mathrm{d}x$ en détaillant et justifiant les différentes étapes de vos calculs.

/4

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. Pour calculer l'intégrale $\int_{-1}^{1} 1/\sqrt{|x|}\,\mathrm{d}x$, un étudiant utilise le théorème fondamental de l'analyse : /3

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x = \Big[2\,\mathrm{sign}(x)\sqrt{|x|}\Big]_{-1}^{1} = 4, \qquad \text{où } \mathrm{sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Sa démarche et son calcul sont-ils corrects ? Si vous pensez que oui, énoncez le théorème fondamental de l'analyse et justifiez son application à la situation présente. Si au contraire vous pensez qu'ils comportent des erreurs, veuillez pointer ces dernières en les expliquant et refaites une démarche et un calcul correct dûment justifiés.

Calculus II

Examen (25 août 2023)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4.

/6

(a) Déterminez l'ensemble des solutions réelles de l'EDO suivante :

$$\partial_t^3 u(t) - 2\partial_t^2 u(t) + \partial_t u(t) = (-4t-8)\,\mathrm{e}^{-t} - 3t^2. \tag{1}$$

(b) Existe-t-il une solution de l'équation (1) vérifiant $u(0) = 0$ et $\partial_t u(0) = 0$? Si oui, donnez une telle solution. Si non, argumentez pourquoi cela n'est pas possible.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Calculus II

Examen (25 août 2023)

Nom :
Prénom :
Section :

/4

Question 5. Déterminez la solution réelle $u : I \to \mathbb{R} : t \mapsto u(t)$ du problème de Cauchy

$$\partial_t u(t) = \frac{1}{2u\,\mathrm{e}^{t+u^2}}\,, \qquad u(0) = u_0,$$

où $u_0 \in \left]-\infty, 0\right]$ et I est un intervalle ouvert aussi grand que possible. Y a-t-il des conditions sur u_0 pour que cette solution existe ? Donnez u sous la forme d'une seule formule (qui peut dépendre de u_0) :

$u(t) =$

$I =$

Il est important de détailler et justifier rigoureusement les calculs qui donnent lieu à votre solution.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.