Analyse mathématique I (B)

Examen (16 août 2019)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !
- Pour la consultation des examens corrigés, **êtes-vous d'accord que votre copie soit vue par d'autres étudiants ?**

  ☐ Oui (auquel cas, votre copie sera mise au « salon bleu » dès la fin de la correction) ;

  ☐ Non (vous pourrez consulter votre copie uniquement le vendredi 6 septembre de 9:00 à 10:00 à la salle des conseils du bâtiment De Vinci).

  L'absence de réponse sera comprise comme la réponse « non ».

Question 1. Considérons l'équation différentielle suivante : /5

$$\partial_t^2 u(t) + 4\partial_t u(t) + 5u(t) = (5+34t)\,\mathrm{e}^{2t}\,.$$

Déterminez l'ensemble des solutions réelles de cette équation.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (16 août 2019)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Calculez le développement de Taylor d'ordre 4 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : /5

$$f(x) = \mathrm{e}^{\cos\left(\frac{2\pi}{1+x^2}\right)}.$$

Expliquez et justifiez les calculs que vous effectuez. Toutes les règles sur les petits o utilisées doivent être redémontrées. Pensez à regrouper les cas pour éviter la répétition d'arguments semblables.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

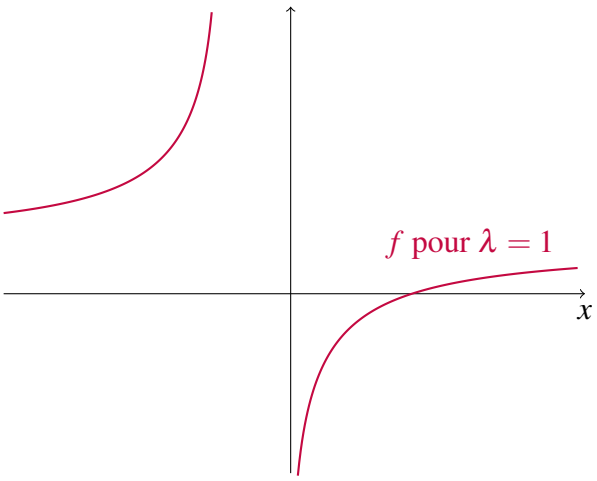
Section :

/6

Question 3. On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lambda \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) - \frac{1}{2x+1}.$$

où $\lambda \in]0, +\infty[$. Le graphe de f pour $\lambda = 1$ est représenté ci-contre.



(a) Déterminez le domaine de f.

(b) Montrez que f a une unique racine sur $\mathbb{R}$ quel que soit λ.

Justifiez rigoureusement toutes vos affirmations.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /5

$$f(x) = \begin{cases} 3\lambda x + 2\lambda^2 + \lambda & \text{si } x < \lambda, \\ 5x^2 + \lambda & \text{si } x \geqslant \lambda, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est continue (resp. dérivable). Justifiez *en détail* toutes vos affirmations.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. /4

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $A \subseteq \mathbb{R}$. Définissez « f est continue sur A » en ε-δ.

(b) On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$. En utilisant directement[1] la définition donnée en (a), montrez que f est continue sur son domaine de définition.

[1] Ceci implique que les théorèmes sur les limites ne peuvent être employés dans cette question.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Un camarade de classe vous dit que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ est décroissante. En effet, on voit bien sur son graphe que f descend partout. De plus, argumente-t-il, la dérivée de f est partout négative, ce qui implique que f est décroissante par un théorème vu au cours. Cet étudiant a-t-il raison ? Son argumentation est-elle correcte ? Votre réponse à chacune de ces deux questions doit être détaillée et argumentée. /3

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. /4

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « a est un minimum local de f ».

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que $f(x) = 1 + 2x^2 + o(x^2)$. Montrez que 0 est un minimum local de f.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est *lipchitzienne* s'il existe une constante $L \in [0,+\infty[$ telle que $\forall x,y \in [a,b]$, $|f(x)-f(y)| \leqslant L|x-y|$. /7

(a) Définissez « la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue ».

(b) En utilisant la définition donnée au point (a), prouvez que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est lipchitzienne, alors f est continue sur $[a,b]$.

(c) Si $f \in \mathscr{C}^1([a,b];\mathbb{R})$, alors f est lipchitzienne et on peut prendre $L := \sup\big\{|\partial f(x)| \;\big|\; x \in [a,b]\big\}$.

(d) Définissez « la fonction $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ est bornée ».

(e) Supposons que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ soit lipchitzienne et dérivable sur $]a,b[$. Montrez qu'alors la dérivée de f est bornée sur $]a,b[$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.