Analyse mathématique I

Examen (13 juin 2022)

Correction

Question 1. *En utilisant la définition de continuité en ε-δ, montrez que la fonction*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \sin(\pi/x) & si\ x < 1, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 & si\ x \geqslant 1, \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^{>0}$. Indication *: Pour rappel,* $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$.

Soit $a \in]0, +\infty[$. Montrons que f est continue en a via la définition en ε-δ, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \operatorname{Dom} f, \quad |x - a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Pour ce faire, distinguons trois cas sur a.

- Supposons $a \in]0, 1[$ et montrons (1). Soit $\varepsilon > 0$. Prenons

$$\delta := \min\Big\{\frac{a}{2}, \frac{1-a}{2}, \frac{a^2}{2\pi}\varepsilon\Big\}.$$

  On a bien que $\delta > 0$ car c'est le minimum de trois nombres strictement positifs. Soit $x \in \operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$ tel que $|x - a| \leqslant \delta$, c'est-à-dire tel que $a - \delta \leqslant x \leqslant a + \delta$. En utilisant $\delta \leqslant (1-a)/2$, on a $x \leqslant a + \delta \leqslant a + \frac{1-a}{2} = \frac{1+a}{2} < 1$ et donc $x < 1$. Ceci nous permet de dire que $f(x) = \sin(\pi/x)$. Par ailleurs, en utilisant $\delta \leqslant a/2$, on a

$$x \geqslant a - \delta \geqslant a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}. \tag{2}$$

  En utilisant le rappel, on déduit :

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &= \Big|\sin\frac{\pi}{x} - \sin\frac{\pi}{a}\Big| \\
&= 2\Big|\cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{a}\Big)\Big)\Big|\,\Big|\sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\Big)\Big)\Big| \\
&\leqslant 2\frac{\pi}{2}\Big|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\Big| && \text{car } |\cos\xi| \leqslant 1 \text{ et } |\sin\xi| \leqslant |\xi| \\
&= \pi\frac{|x-a|}{xa} && \text{car } x, a \in]0, +\infty[\\
&\leqslant \frac{2\pi}{a^2}|x - a| && \text{grâce à (2)} \\
&\leqslant \frac{2\pi}{a^2}\delta \leqslant \varepsilon && \text{car } \delta \leqslant \frac{a^2}{2\pi}\varepsilon.
\end{aligned}$$

- Si $a \in]1, +\infty[$, le raisonnement est similaire *mutatis mutandis*. Soit $\varepsilon > 0$. Prenons

$$\delta := \min\Big\{\frac{a-1}{2}, 2\sqrt{a}\,\varepsilon\Big\}.$$

Le minimum δ est bien strictement positif car il vaut l'une des deux quantités $\frac{a-1}{2}$ ou $2\sqrt{a}\,\varepsilon$ qui sont toutes les deux strictement positives. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-a| \leqslant \delta$. En particulier, $x \geqslant a-\delta \geqslant a-\frac{a-1}{2} = \frac{a+1}{2} > 1$ et donc $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$. Dès lors

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(a)| &= \Big|\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{a}} + 1\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\Big| = \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{a}|}{\sqrt{x}\sqrt{a}} \\
&= \frac{|x-a|}{\sqrt{x}\sqrt{a}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})} && \text{en utilisant le binôme conjugué} \\
&\leqslant \frac{|x-a|}{2\sqrt{a}} && \text{car } \sqrt{x} \geqslant 1 \text{ et } \sqrt{x}+\sqrt{a} \geqslant \sqrt{a} \\
&\leqslant \frac{\delta}{2\sqrt{a}} \leqslant \varepsilon && \text{car } \delta \leqslant 2\sqrt{a}\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

- Finalement, gérons le cas $a = 1$. Pour celui-ci, aucun choix de δ ne permettra d'éviter une des deux branches de la définition de f. Soit $\varepsilon > 0$. Prenons

$$\delta := \min\Big\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2\pi}, \frac{\sqrt{2}+1}{2}\,\varepsilon\Big\}.$$

Comme δ est le minimum de trois quantités strictement positives, il l'est également. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-a| \leqslant \delta$. En particulier, ceci implique que

$$x \geqslant 1-\delta \geqslant 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Notons aussi que $f(1) = \frac{1}{\sqrt{1}} - 1 = 0$. Montrons que $|f(x)-f(1)| = |f(x)| \leqslant \varepsilon$.

- Si $x < 1$, on a

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(1)| = |f(x)| &= \Big|\sin\frac{\pi}{x}\Big| \\
&= \Big|\sin\frac{\pi}{x} - \sin\pi\Big| && \text{vu que } \sin\pi = 0 \\
&= 2\Big|\cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big(\frac{1}{x}+1\Big)\Big)\Big|\,\Big|\sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big(\frac{1}{x}-1\Big)\Big)\Big| && \text{grâce au rappel} \\
&\leqslant 2\frac{\pi}{2}\Big|\frac{1}{x}-1\Big| && \text{vu que } |\cos\xi| \leqslant 1 \text{ et } |\sin\xi| \leqslant |\xi| \\
&= \pi\frac{|x-1|}{x} && \text{vu que } x > 0 \text{ grâce à (3)} \\
&\leqslant 2\pi|x-1| && \text{grâce à (3)} \\
&\leqslant 2\pi\delta \leqslant \varepsilon && \text{vu que } \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}.
\end{aligned}$$

- Si $x \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(1)| = |f(x)| &= \left|\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right| \\
&= \frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}} = \frac{|x-1|}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\
&\leqslant \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}|x-1| && \text{grâce à (3)} \\
&\leqslant \frac{2}{1+\sqrt{2}}\,\delta \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Quel que soit x tel que $|x-a| \leqslant \delta$, on a établi que $|f(x)-f(1)| \leqslant \varepsilon$, ce qui finit d'établir la continuité en $a=1$.

Question 2. *Considérons une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

(a) Définissez $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$$\forall (x_n) \subseteq \operatorname{Dom} f,\ x_n \to -\infty \Rightarrow f(x_n) \to -\infty$$

(b) Définissez $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

$$\forall (x_n) \subseteq \operatorname{Dom} f,\ x_n \to +\infty \Rightarrow f(x_n) \to -\infty$$

Supposons maintenant que f soit continue et vérifie ces trois conditions :

(c) il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > 0$;

(d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$;

(e) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Prouvez qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que les trois propriétés suivantes soient simultanément vérifiées :

(f) $x_0 \in \,]a,b[$;

(g) $\forall x \in \,]a,b[,\ f(x) > 0$;

(h) $f(a) = 0 = f(b)$.

Si vous utilisez une définition de $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (resp. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$), cela doit être celle donnée au point (a) (resp. (b)). Veillez à justifier rigoureusement chacune de vos affirmations.

Commençons par remarquer qu'il y a deux options possibles pour les définitions (a) et (b) : celle en terme de suites et celle en « ε-δ ». Nous avons choisi la première afin d'insister sur le fait qu'une partie de cette question peut être résolue avec des techniques du cours de Calculus I. Nous vous invitons à écrire une approche utilisant la définition en « ε-δ ».

(i) Pour trouver a et b, une première étape est de montrer qu'il existe a_0 et b_0 tels que $a_0 < x_0 < b_0$ et $f(a_0) \leqslant 0$ et $f(b_0) \leqslant 0$.

Pour l'existence de b_0, considérons la suite $(x_n) = (x_0 + n)_{n \geqslant 1}$. On a que $x_n = x_0 + n \to +\infty$ (par les règles de calcul) et donc, par la définition (b) de la limite, $f(x_0 + n) \to -\infty$. Ceci implique qu'il existe un n_1 tel que $f(x_0 + n_1) < 0$. En effet,[1] si ce n'était pas le cas, on aurait $\forall n,\ f(x_0 + n) \geqslant 0$. Mais alors, par limite d'inégalités, ceci implique $-\infty \geqslant 0$, une contradiction. Nous posons $b_0 := x_0 + n_1$.

Pour l'existence de $a_0 < x_0$ tel que $f(a_0) < 0$, on procède de la même manière : on considère la suite $(x_n) = (x_0 - n)_{n \geqslant 1}$ et on montre qu'il existe un $n_2 \geqslant 1$ tel que $f(x_0 - n_2) < 0$. On pose $a_0 := x_0 - n_2$.

(ii) Raffinons maintenant le choix des points, notamment pour avoir la propriété (g). Commençons par montrer l'existence d'un $b > x_0$ tel que $f(b) = 0$ et $\forall x \in \,]x_0, b[,\ f(x) > 0$. Pour cela, il faut prendre pour b la racine de f la plus proche de x_0 (faites un dessin avec un f oscillant). Plus précisément, on va considérer

$$b := \inf B \quad \text{où } B := \{x > x_0 \mid f(x) \leqslant 0\}.$$

Tout d'abord, $b_0 \in B$, d'où $B \neq \varnothing$ et par conséquent $\inf B \in [-\infty, +\infty[$. Ensuite, x_0 est un minorant de B et donc $\inf B \in [x_0, +\infty[$ (et est donc en particulier réel). Par définition de l'infimum, il existe une suite $(x_n) \subseteq B$ telle que $x_n \to b$. En particulier, $\forall n,\ f(x_n) \leqslant 0$. Par limite d'inégalités et en utilisant la continuité de f, on a $f(b) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant 0$. Ceci implique en particulier que $b \neq x_0$ (vu que $f(x_0) > 0$), d'où $b > x_0$.

Montrons à présent que $\forall x \in \,]x_0, b[,\ f(x) > 0$. si ce n'était pas le cas, on aurait un $x \in \,]x_0, b[$ tel que $f(x) \leqslant 0$. En particulier, $x \in B$ et $x < b = \inf B$, ce qui contredit le fait que l'infimum minore l'ensemble.

Montrons pour finir que $f(b) = 0$. On sait déjà par le raisonnement précédent que $f(b) \leqslant 0$. Pour établir l'inégalité opposée, considérons la suite $(x'_n) = (b - 1/n)_{n \geqslant 1}$. Pour tous les naturels n tels que $n > \frac{1}{b - x_0}$, $x'_n \in \,]x_0, b[$ et donc $f(x'_n) > 0$. En passant à la limite et en se rappelant que f est continue, on obtient $f(b) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n) \geqslant 0$. Ceci finit la construction de b.

Pour a, on agit de manière similaire : on considère $a := \sup A$ où $A := \{x < x_0 \mid f(x) \leqslant 0\}$. De manière semblable à ce qui a été fait ci-dessus, on prouve successivement que

- $a \in \,]-\infty, x_0]$;
- $f(a) \leqslant 0$ d'où $a < x_0$;
- $\forall x \in \,]a, x_0[,\ f(x) > 0$;
- $f(a) = 0$.

En rassemblant les éléments ci-dessus, on a bien construit $a < x_0 < b$ tels que $\forall x \in \,]a, b[\, = \,]a, x_0[\, \cup \{x_0\} \cup \,]x_0, b[,\ f(x) > 0$ et tels que $f(a) = 0 = f(b)$.

[1] De nouveau, nous avons plusieurs possibilités pour le montrer. L'une d'entre-elle est d'utiliser la définition en « ε-n » de la convergence. (Pouvez-vous le faire ?) Ici nous ne faisons pas ce choix ; nous utilisons des arguments du niveau de Calculus I.

Question 3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et $K \subseteq \mathbb{R}$.*

(a) Définissez « K est un ensemble compact ».

$\forall (x_n) \subseteq K,\ \exists (x'_n)$ une sous-suite de (x_n), $\exists a \in K,\ x'_n \to a$.

(b) En supposant que K est compact, montrez que $f(K)$ est compact.

(c) Montrez qu'on n'a pas forcément que $f^{-1}(K) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in K\}$ est compact.

Veillez à justifier rigoureusement chacune de vos affirmations.

(b) Soit (y_n) une suite de $f(K)$. Nous devons montrer qu'il existe une sous-suite (y'_n) de (y_n) et $b \in f(K)$ tels que $y'_n \to b$. Quel que soit n, par définition de $f(K) = \{y \mid \exists x \in K,\ y = f(x)\}$, nous avons l'existence d'un $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$. Vu que K est compact, il existe une sous-suite (x'_n) de (x_n) et $a \in K$ tels que $x'_n \to a$. Prenons (y'_n) la sous-suite de (y_n) avec la même sélection d'indices que pour $(x'_n)_{n\in J}$. Plus précisément, le fait que (x'_n) soit une sous-suite de $(x_n)_{n\in I}$ signifie qu'il existe une fonction strictement croissante $\varphi : J \to I$ telle que

$$\forall n \in J, \quad x'_n = x_{\varphi(n)}.$$

On définit alors $y'_n := y_{\varphi(n)}$ pour tout n. En particulier, ceci implique que

$$y'_n = y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) = f(x'_n).$$

Comme $x'_n \to a \in K$ et que f est continue, on en déduit que $y'_n = f(x'_n) \to f(a) \in f(K)$. Il suffit donc de prendre $b := f(a)$ pour conclure l'argument.

(c) La question demande de produire une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un compact K de $\mathbb{R}$ tels que $f^{-1}(K)$ ne soit pas compact (i.e., pas fermé ou pas borné). Prenons par exemple

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 0 \quad \text{et} \quad K = \{0\}.$$

Par définition de f^{-1}, on a que $x \in f^{-1}(\{0\}) \Leftrightarrow f(x) \in \{0\}$. Comme cette dernière propriété est toujours vraie, $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$. Clairement, $\mathbb{R}$ n'est pas compact (il n'est pas borné vu que, si on avait une borne $C > 0$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant C$, ça donnerait une contradiction en prenant $x = C + 1$).

REMARQUE 1 : Il y a de nombreuses fonctions et compacts possibles comme contre-exemple. Voici un autre choix :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad K = [0, 1].$$

Il suffit de noter que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant 0$ et, dès lors, $f(x) \in K \Leftrightarrow x \leqslant 0$. Par définition de f^{-1}, ceci implique que $f^{-1}([0,1]) =]-\infty, 0]$ qui n'est pas borné.

REMARQUE 2 : Pour une fonction continue f, on peut montrer (faites le !) que $f^{-1}(F)$ est fermé si F est fermé (a fortiori compact). Par conséquent, le défaut de compacité de $f^{-1}(K)$ peut provenir uniquement du fait qu'il ne soit pas borné.