Analyse mathématique I

Examen (21 août 2023)

Correction

Question 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \operatorname{Dom} f$.*

- *Définissez « f est continue en a » en ε-δ :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \operatorname{Dom} f,\ |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$$

- *Soit $V \subset \mathbb{R}$. Définissez « V est un voisinage de a » :*

$$\exists r > 0,\ [a-r, a+r] \subseteq V$$

- *Montrez en utilisant les définitions précédentes que, si $f(a) > 0$ et que f est continue en a, alors il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V,\ f(x) > 0$.*

Particularisons la définition de continuité donnée ci-dessus à $\varepsilon := f(a)/2 > 0$. Ceci donne un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f,\ |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Considérons le voisinage $V := [a-\delta, a+\delta]$. C'est bien un voisinage de a puisque, pour montrer que la définition ci-dessus est vraie, il suffit de prendre $r = \delta > 0$ pour avoir $[a-r, a+r] \subseteq V$ (vu qu'on a en fait l'égalité). Il reste à montrer que

$$\forall x \in V,\ f(x) > 0.$$

Soit $x \in V = [a-\delta, a+\delta]$. Cette appartenance peut se réécrire $|x-a| \leqslant \delta$. Vu que la prémisse de l'implication de (1) est vraie, on en déduit qu'il en est de même pour sa conclusion. On a donc $|f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$. Cette dernière inégalité peut s'écrire $f(a)-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(a)+\varepsilon$. En ne gardant que l'inégalité de gauche, on a donc

$$f(x) \geqslant f(a)-\varepsilon = f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2} > 0.$$

Question 2. *Donnez un exemple d'une suite de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\underline{\lim}\, x_n = 1$ et $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$. Le fait que votre exemple satisfasse les conditions requises doit être rigoureusement établi.*

Prenons, par exemple, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$x_n := \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Pour un $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on va montrer que

$$\inf\{x_m \mid m \geqslant n\} = \min\{x_m \mid m \geqslant n\} = 1, \tag{2}$$

$$\sup\{x_m \mid m \geqslant n\} = +\infty. \tag{3}$$

En effet, pour (2), il est clair que $\forall m \geqslant n,\ x_m \geqslant 1$ (puisque tous les éléments x_n de la suite sont $\geqslant 1$) et $1 \in \{x_m \mid m \geqslant n\}$ (il suffit de prendre m impair $\geqslant n$ pour avoir $x_m = 1$).
Pour (3), il suffit de montrer que l'ensemble $\{x_m \mid m \geqslant n\}$ est non borné supérieurement, c'est-à-dire que $\forall C > 0,\ \exists u \in \{x_m \mid m \geqslant n\},\ u > C$. Soit $C > 0$. Prenons (par exemple[1]) $m = \max\{n, 2\lceil C\rceil + 1\}$ et $u = x_m$. Par définition du max, on a $m \geqslant n$. Donc $u = x_m \in \{x_m \mid m \geqslant n\}$. On a aussi $u = x_m \geqslant 2\lceil C\rceil + 1 > 2\lceil C\rceil \geqslant 2C > C$.
Pour conclure, il suffit de passer à la limite $n \to +\infty$ sur (2)–(3) (qui définissent des suites constantes par rapport à n) :

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_m \mid m \geqslant n\} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$
$$\overline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_m \mid m \geqslant n\} = \lim_{n\to\infty} +\infty = +\infty.$$

Question 3.

- *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \operatorname{Dom} f$. Définissez « a est un minimum local de f ».*

  $\exists V$ voisinage de a, $\forall x \in V \cap \operatorname{Dom} f$, $f(x) \geqslant f(a)$.

- *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que $f(x) = 1 + x^2 + \mathrm{o}(x^2)$ quand $x \to 0$. Montrez qu'alors 0 est un minimum local de f.*

Tout d'abord, remarquons que $f(0) = 1 + 0^2 + \mathrm{o}(x^2)|_{x=0} = 1$ car, par définition de petit o, $\mathrm{o}(x^2)$ doit s'annuler en $x = 0$. On peut écrire l'hypothèse que f vérifie sous la forme

$$f(x) = 1 + \Big(1 + \frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2}\Big)x^2 \quad \text{quand } x \to 0.$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe un voisinage V de 0 tel que

$$\forall x \in V, \quad 1 + \frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2} \geqslant 0 \tag{4}$$

car alors, quel que soit $x \in V$, on aura $f(x) = 1 + \big(1 + \frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2}\big)x^2 \geqslant 1 = f(0)$, ce qui est la définition de minimum local.
Pour montrer (4), il suffit de se rappeler que la définition de petit o implique que $\frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2} \to 0$ quand $x \to 0$ et, par conséquent, la règle de calcul sur la limite d'une somme donne

$$1 + \frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

Il suffit alors d'appliquer le résultat qu'il est demandé de prouver à la question 1 pour obtenir un voisinage V sur lequel $1 + \frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2} > 0$.

[1] Il suffit de prendre m impair tel que $m \geqslant n$ et $m > C$. L'expression donnée pour m est une manière parmi d'autres de satisfaire ces contraintes.

Question 4. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. Montrez qu'il existe un $C \geqslant 0$ tel que $\forall x \in [0,1],\ |f(x)| \leqslant C|x|$.*

Comme la dérivée $f' : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une application continue, il en va de même pour $|f'| : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto |f'(x)|$ (puisque c'est la composée de deux applications continues, à savoir la valeur absolue $y \mapsto |y|$ et f'). Par ailleurs $[0,1]$ est compact. Donc $|f'|$ atteint ses bornes. En particulier, ceci garantit que la quantité

$$C := \sup\{|f'(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

est finie (puisqu'elle vaut la valeur de $|f'|$ en un certain point de $[0,1]$).

Montrons que $\forall x \in [0,1],\ |f(x)| \leqslant C|x|$. Soit $x \in [0,1]$. Si $x = 0$, on a bien $|f(0)| = 0 \leqslant C|0| = 0$. Reste à traiter le cas $x > 0$. Comme f est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, on peut appliquer le théorème de la moyenne sur $[0,x]$ et obtenir un $\xi \in]0,x[$ tel que

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x-0).$$

En tenant compte que $f(0) = 0$ et en prenant les valeurs absolues des deux membres, on obtient

$$|f(x)| = |f'(\xi)|\,|x|.$$

Vu la définition de C et parce que $\xi \in]0,x[\subseteq [0,1]$, on a $|f'(\xi)| \leqslant C$. Dès lors $|f(x)| = |f'(\xi)|\,|x| \leqslant C|x|$, ce qui conclut la preuve.