Existence and boundary behavior of solutions for a nonlinear Dirichlet problem in the annulus

Sonia. Ben Makhlouf , Malek. Zribi

Workshop in Nonlinear PDEs (Belgique, septembre 2015)

1. Introduction
   - Objectif
   - Historique
   - Motivation
2. Etude d'un problème non linéaire de Dirichlet
   - Propriétés des fonctions dans $\mathscr{K}$
   - Quelques résultats d'estimation du potentiel
   - Condition suffisante d'existence
   - Résultats principaux

Objectif

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n, (n \geq 2) : 0 < a < |x| < b < \infty\}.$$

Problème

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = q(x) f(u), & x \in \Omega, \\ u > 0 \ \ \text{in}\ \Omega, & u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

où q et f sont deux fonctions mesurables positives, telles que $q \in \mathscr{C}^{\gamma}_{loc}(\Omega)$, $0 < \gamma < 1$ et $f \in \mathscr{C}^1(0, \infty)$.

Historique

A. C. Lazer, P. J. McKenna, On a singular elliptic boundary value problem, Proc. Amer. Math. Soc. 111 (1991) 721-730.

Soit Ω un $C^{1,1}$ domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$.

$$(Q) \begin{cases} -\Delta u = q(x) u^{\sigma}, \ x \in \Omega, \ \sigma < -1, \\ u > 0 \text{ sur } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

$q \in C^{\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$, $0 < \gamma < 1$ satisfaisant

$$q(x) \approx \delta(x)^{-\lambda}, \quad \text{pour } x \in \overline{\Omega},$$

avec $0 < \lambda < 2$ et $\delta(x) = dist(x, \partial\Omega)$.

$\Rightarrow$ Il existe une unique solution $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2+\gamma}(\Omega)$,

$$c_1 \delta(x)^{\frac{2}{1-\sigma}} \leq u(x) \leq c_2 \delta(x)^{\frac{2-\lambda}{1-\sigma}}, \quad \text{pour } x \in \overline{\Omega}.$$

Historique

A. C. Lazer, P. J. McKenna, On a singular elliptic boundary value problem, Proc. Amer. Math. Soc. 111 (1991) 721-730.

Soit Ω un $C^{1,1}$ domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$.

$$(Q)\begin{cases} -\Delta u = q(x)u^{\sigma}, \ x \in \Omega, \ \sigma < -1, \\ u > 0 \text{ sur } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

$q \in C^{\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$, $0 < \gamma < 1$ satisfaisant

$$q(x) \approx \delta(x)^{-\lambda}, \quad \text{pour } x \in \overline{\Omega},$$

avec $0 < \lambda < 2$ et $\delta(x) = dist(x, \partial\Omega)$.

$\Rightarrow$ Il existe une unique solution $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2+\gamma}(\Omega)$,

$$c_1\delta(x)^{\frac{2}{1-\sigma}} \leq u(x) \leq c_2\delta(x)^{\frac{2-\lambda}{1-\sigma}}, \quad \text{pour } x \in \overline{\Omega}.$$

Historique

★ H. Mâagli, Asymptotic behavior of positive solution of a semilinear Dirichlet problem, Nonlinear Anal. 74 (2011) 2941-2947.

$$(Q)\begin{cases} -\Delta u = q(x)u^{\sigma}, \ x \in \Omega, \ \sigma < 1 \\ u > 0 \text{ sur } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Où Ω est un $C^{1,1}$ domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$.

$(\mathbf{H_1})$ $q \in C^{\gamma}_{loc}(\Omega)$, $0 < \gamma < 1$ vérifiant pour tout $x \in \Omega$

$$q(x) \approx \delta(x)^{-\lambda} L(\delta(x)),$$

avec $\lambda \leq 2$ et $L \in \mathscr{K}$ telque $\int_0^{\eta} t^{1-\lambda} L(t)\, dt < \infty$.

Historique

★ H. Mâagli, Asymptotic behavior of positive solution of a semilinear Dirichlet problem, Nonlinear Anal. 74 (2011) 2941-2947.

$$(Q)\begin{cases} -\Delta u = q(x)u^{\sigma}, \ x \in \Omega, \ \sigma < 1 \\ u > 0 \text{ sur } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Où Ω est un $C^{1,1}$ domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$.

$(\mathbf{H_1})$ $q \in C^{\gamma}_{loc}(\Omega)$, $0 < \gamma < 1$ vérifiant pour tout $x \in \Omega$

$$q(x) \approx \delta(x)^{-\lambda} L(\delta(x)),$$

avec $\lambda \leq 2$ et $L \in \mathscr{K}$ telque $\int_0^{\eta} t^{1-\lambda} L(t)\, dt < \infty$.

Théorème (Mâagli)

Sous l'hypothèse (H_1) . *Le problème* (Q) *admet une unique solution* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2+\gamma}(\Omega)$, *vérifiant*

$$u(x) \approx \delta(x)^{\min(1,\frac{2-\lambda}{1-\sigma})}\Psi_{L,\lambda,\sigma}(\delta(x)),$$

où $\Psi_{L,\lambda,\sigma}$ *est la fonction definie sur* $(0,\eta]$ *par*

$$\Psi_{L,\lambda,\sigma}(t) := \begin{cases} 1, & si\ \lambda < 1+\sigma, \\ \left(\int_t^\eta \frac{L(s)}{s}\,ds\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}, & si\ \lambda = 1+\sigma, \\ (L(t))^{\frac{1}{1-\sigma}}, & si\ \ 1+\sigma < \lambda < 2, \\ \left(\int_0^t \frac{L(s)}{s}\,ds\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}, & si\ \lambda = 2. \end{cases}$$

Théorème (Mâagli)

Sous l'hypothèse (H_1) . *Le problème* (Q) *admet une unique solution* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2+\gamma}(\Omega)$, *vérifiant*

$$u(x) \approx \delta(x)^{\min(1,\frac{2-\lambda}{1-\sigma})} \Psi_{L,\lambda,\sigma}(\delta(x)),$$

où $\Psi_{L,\lambda,\sigma}$ *est la fonction definie sur* $(0,\eta]$ *par*

$$\Psi_{L,\lambda,\sigma}(t) := \begin{cases} 1, & si\ \lambda < 1+\sigma, \\ \left(\int_t^\eta \frac{L(s)}{s}\,ds\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}, & si\ \lambda = 1+\sigma, \\ (L(t))^{\frac{1}{1-\sigma}}, & si\ \ 1+\sigma < \lambda < 2, \\ \left(\int_0^t \frac{L(s)}{s}\,ds\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}, & si\ \lambda = 2. \end{cases}$$

Motivation

S.Ben Othman, B. Khamessi ont considéré le problème (P) avec Ω un $C^{1,1}$ domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$.
Les fonctions q et f vérifient les conditions suivantes

$(\mathbf{H}_2)$ $q \in \mathscr{C}^{\gamma}_{loc}(\Omega)$, $(0 < \gamma < 1)$ vérifiant pour tout $x \in \Omega$

$$\delta(x)^{-\lambda_1} L_1(\delta(x)) \leq q(x) \leq \delta(x)^{-\lambda_2} L_2(\delta(x)),$$

avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 2$ et pour $i \in \{1, 2\}$, $L_i \in \mathscr{K}$ tel que $\int_0^\eta t^{1-\lambda_i} L_i(t)dt < \infty$.

$(\mathbf{H}_3)$ f est une fonction positive appartenant à $C^1((0, \infty))$ vérifiant

$$c_1 u^{\sigma_1} \leq f(u) \ \text{si} \ 0 < u \leq 1 \quad \text{et} \quad f(u) \leq c_2 u^{\sigma_2} \ \text{si} \ u > 0,$$

$\sigma_2 \leq \sigma_1 < 1$ et $0 < c_1 < c_2$.

Motivation

S.Ben Othman, B. Khamessi ont considéré le problème (P) avec Ω un $C^{1,1}$ domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$.
Les fonctions q et f vérifient les conditions suivantes

$(\mathbf{H}_2)$ $q \in \mathscr{C}^{\gamma}_{loc}(\Omega)$, $(0 < \gamma < 1)$ vérifiant pour tout $x \in \Omega$

$$\delta(x)^{-\lambda_1} L_1(\delta(x)) \leq q(x) \leq \delta(x)^{-\lambda_2} L_2(\delta(x)),$$

avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 2$ et pour $i \in \{1, 2\}$, $L_i \in \mathscr{K}$ tel que $\int_0^{\eta} t^{1-\lambda_i} L_i(t)dt < \infty$.

$(\mathbf{H}_3)$ f est une fonction positive appartenant à $C^1((0, \infty))$ vérifiant

$$c_1 u^{\sigma_1} \leq f(u) \text{ si } 0 < u \leq 1 \quad \text{et} \quad f(u) \leq c_2 u^{\sigma_2} \text{ si } u > 0,$$

$\sigma_2 \leq \sigma_1 < 1$ et $0 < c_1 < c_2$.

Motivation

Théorème (Ben Othman et al)

Sous les hypothèses (H_2) *et* (H_3), *le problème* (P) *admet une solution* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2+\gamma}(\Omega)$ *telle que pour tout* $x \in \Omega$,

$$\frac{1}{c}\delta(x)^{\min\left(1,\frac{2-\lambda_1}{1-\sigma_1}\right)}\psi_{L_1,\lambda_1,\sigma_1}\left(\delta(x)\right) \leq u(x)$$

et

$$u(x) \leq c\delta(x)^{\min\left(1,\frac{2-\lambda_2}{1-\sigma_2}\right)}\psi_{L_2,\lambda_2,\sigma_2}\left(\delta(x)\right),$$

où $c > 0$.

Motivation

S.Dridi, B. Khamessi considérent le problème (Q) dans le cas où $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n, (n \geq 3) : 0 < a < |x| < b < \infty\}$, avec $\sigma < 1$ et q est une fonction mesurable positive vérifiant

$(\mathbf{H_4})$ $q \in C^{\gamma}_{loc}(\Omega)$, $0 < \gamma < 1$ tel que pour tout $x \in \Omega$

$$q(x) \approx (|x| - a)^{-\lambda_1}(b - |x|)^{-\lambda_2} L_1(|x| - a) L_2(b - |x|),$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \leq 2$ et pour $i \in \{1, 2\}$, $L_i \in \mathscr{K}$ vérifiant $\int_0^\eta t^{1-\lambda_i} L_i(t)\,dt < \infty$.

Motivation

Théorème (Dridi et al)

Soit $\sigma < 1$ *et supposons que* q *satisfait* (H_4). *Alors le problème* (Q) *possède une solution unique* u *satisfaisant pour tout* $x \in \Omega$,

$$u(x) \approx \theta_\sigma(x),$$

où θ_σ *est une fonction définie sur* Ω *par*

$$\theta_\sigma(x) := (|x| - a)^{min(1, \frac{2-\lambda_1}{1-\sigma})} \psi_{L_1,\lambda_1,\sigma}(|x| - a)$$
$$(b - |x|)^{min(1, \frac{2-\lambda_2}{1-\sigma})} \psi_{L_2,\lambda_2,\sigma}(b - |x|).$$

Hypothèses

Considérons le problème

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = q(x)f(u), & x\in\Omega, \\ u>0 \text{ in } \Omega, & u_{|\partial\Omega}=0, \end{cases}$$

où $\Omega := \{x\in\mathbb{R}^n, (n\geq 2) : 0<a<|x|<b<\infty\}$ et les fonctions f et q vérifient respectivement (H_3) et (H_4) .

Résultat principal

Théorème

Sous les hypothèses $(\mathbf{H_3})$ *et* $(\mathbf{H_4})$*. Alors le problème* (P) *admet une solution* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2+\gamma}(\Omega)$ *vérifiant*

$$c_1\theta_{\sigma_1}(x) \leq u(x) \leq c_2\theta_{\sigma_2}(x),$$

où $c_1, c_2 > 0$*.*

Propriétés des fonctions dans $\mathscr{K}$

Definition

On note $\mathscr{K}$ l'ensemble des fonctions L définies sur $(0, \eta]$, par

$$L(t) := \exp\left(\int_t^\eta \frac{z(s)}{s} ds\right),$$

où $\eta > d := diam(\Omega)$ et $z \in C([0, \eta])$ vérifiant $z(0) = 0$.

On remarque que $L \in \mathscr{K}$ si et seulement si L est une fonction positive de $C^1((0, \eta])$ telle que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{tL'(t)}{L(t)} = 0.$$

Propriétés des fonctions dans $\mathscr{K}$

Lemme (1)

- *Soient* $L_1, L_2 \in \mathscr{K}, p \in \mathbb{R}$ *et* $\varepsilon > 0$. *Alors, on a*

$$L_1 L_2 \in \mathscr{K}, L_1^p \in \mathscr{K},$$

$$\lim_{t \longrightarrow 0} t^{\varepsilon} L_1(t) = 0.$$

- *Soit* $L \in \mathscr{K}$ *definie sur* $(0, \eta]$. *Alors, on a*

$$t \longrightarrow \int_t^{\eta} \frac{L(x)}{x} dx \in \mathscr{K}.$$

Et, si $\int_0^{\eta} \frac{L(t)}{t} dt$ *converge, alors on a* $t \longrightarrow \int_0^t \frac{L(x)}{x} dx \in \mathscr{K}$.

Lemme (2)

[Théorème de Karamata] Soit $L \in \mathscr{K}$ *définie sur* $(0, \eta]$ *and* $\sigma \in \mathbb{R}$. *Alors, on a*

- *Si* $\sigma > -1$, *alors* $\int_0^\eta t^\sigma L(t)\,dt$ *converge et*

$$\int_0^t s^\sigma L(s)\,ds \sim \frac{t^{1+\sigma} L(t)}{\sigma + 1} \ si \ t \longrightarrow 0^+.$$

- *Si* $\sigma < -1$, *alors* $\int_0^\eta t^\sigma L(t)\,dt$ *diverge et*

$$\int_t^\eta s^\sigma L(s)\,ds \sim -\frac{t^{1+\sigma} L(t)}{\sigma + 1} \ si \ t \longrightarrow 0^+.$$

⋆ **Remarque**

$$L \in \mathscr{K} \Longrightarrow \int_0^\eta t^{1-\lambda} L(t)\,dt < \infty, \ \forall \lambda < 2.$$

Quelques résultats d'estimation du potentiel

Proposition (1)

Soit q une fonction satisfaisant (H_4). Alors pour tout $x \in \Omega$,

$$Vq(x) \approx \theta_0(x).$$

Idée de la Preuve : On suppose $n = 2$ et on pose $p(x) := (|x| - a)^{-\lambda_1}(b - |x|)^{-\lambda_2} L_1(|x| - a) L_2(b - |x|), \ x \in \Omega.$

$$q(x) \approx p(x), \ x \in \Omega,$$

vérifiant $\int_a^b (b - r)(r - a)\, p(r)\, dr < \infty$ et donc

$$Vp(x) = \int_a^b r \ln\left(\frac{\min(|x|, r)}{a}\right) \ln\left(\frac{b}{\max(|x|, r)}\right)$$

$$(r - a)^{-\lambda_1}(b - r)^{-\lambda_2} L_1(r - a) L_2(b - r)\, dr$$

Quelques résultats d'estimation du potentiel

Proposition (1)

Soit q une fonction satisfaisant (H_4). Alors pour tout $x \in \Omega$,

$$Vq(x) \approx \theta_0(x).$$

Idée de la Preuve : On suppose $n = 2$ et on pose
$p(x) := (|x| - a)^{-\lambda_1}(b - |x|)^{-\lambda_2} L_1(|x| - a) L_2(b - |x|), \ x \in \Omega.$

$$q(x) \approx p(x), \ x \in \Omega,$$

vérifiant $\int_a^b (b-r)(r-a)\,p(r)\,dr < \infty$ et donc

$$Vp(x) = \int_a^b r \ln\left(\frac{\min(|x|,r)}{a}\right) \ln\left(\frac{b}{\max(|x|,r)}\right) (r-a)^{-\lambda_1}(b-r)^{-\lambda_2} L_1(r-a) L_2(b-r)\,dr$$

Quelques résultats d'estimation du potentiel

Proposition (1)

Soit q une fonction satisfaisant (H_4). Alors pour tout $x \in \Omega$,

$$Vq(x) \approx \theta_0(x).$$

Idée de la Preuve : On suppose $n = 2$ et on pose $p(x) := (|x| - a)^{-\lambda_1}(b - |x|)^{-\lambda_2} L_1(|x| - a) L_2(b - |x|),\ x \in \Omega.$

$$q(x) \approx p(x),\ x \in \Omega,$$

vérifiant $\int_a^b (b-r)(r-a)\,p(r)\,dr < \infty$ et donc

$$Vp(x) = \int_a^b r \ln\left(\frac{\min(|x|, r)}{a}\right) \ln\left(\frac{b}{\max(|x|, r)}\right) (r-a)^{-\lambda_1}(b-r)^{-\lambda_2} L_1(r-a) L_2(b-r)\,dr$$

Quelques résultats d'estimation du potentiel

Proposition (2)

Soit q une fonction vérifiant (H_4). Alors pour tout $x \in \Omega$, on a

$$V(q\theta_\sigma^\sigma)(x) \approx \theta_\sigma(x).$$

Idée de la Preuve : On a, pour tout $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} q(x)\theta_\sigma^\sigma(x) &\approx p(x)\theta_\sigma^\sigma(x) \\ &\approx (|x|-a)^{-\mu_1}(b-|x|)^{-\mu_2}\widetilde{L}_1(|x|-a)\widetilde{L}_2(b-|x|), \end{aligned}$$

Où $\mu_1 = \lambda_1 - \sigma\min(1, \frac{2-\lambda_1}{1-\sigma})$, $\mu_2 = \lambda_2 - \sigma\min(1, \frac{2-\lambda_2}{1-\sigma})$, $\widetilde{L}_1 = L_1\psi^\sigma_{L_1,\lambda_1,\sigma}$ et $\widetilde{L}_2 = L_2\psi^\sigma_{L_2,\lambda_2,\sigma}$.

Quelques résultats d'estimation du potentiel

Proposition (2)

Soit q une fonction vérifiant (H_4). Alors pour tout $x \in \Omega$, on a

$$V(q\theta_\sigma^\sigma)(x) \approx \theta_\sigma(x).$$

Idée de la Preuve : On a, pour tout $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} q(x)\theta_\sigma^\sigma(x) &\approx p(x)\theta_\sigma^\sigma(x) \\ &\approx (|x|-a)^{-\mu_1}(b-|x|)^{-\mu_2}\widetilde{L}_1(|x|-a)\widetilde{L}_2(b-|x|), \end{aligned}$$

Où $\mu_1 = \lambda_1 - \sigma\min(1, \frac{2-\lambda_1}{1-\sigma})$, $\mu_2 = \lambda_2 - \sigma\min(1, \frac{2-\lambda_2}{1-\sigma})$,
$\widetilde{L}_1 = L_1\psi^\sigma_{L_1,\lambda_1,\sigma}$ et $\widetilde{L}_2 = L_2\psi^\sigma_{L_2,\lambda_2,\sigma}$.

Condition suffisante d'existence

On considère le problème plus général

$$(S)\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u > 0 \text{ dans } \Omega, & u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

Definition

Une fonction positive $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ est dite une sous-solution du problème (S) si

$$\begin{cases} -\Delta u \leq f(x,u), & x \in \Omega, \\ u > 0 \text{ dans } \Omega, & u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Si l' inégalité précédente est inversée, u est dite une sur-solution du problème (S).

Condition suffisante d'existence

Lemme (5,Zhang)

Soit f une fonction continue locallement hölderiènne dans $\Omega \times (0, \infty)$ et continuement différentiable par rapport à la seconde variable . Supposons que le problème (S) possède une sur-solution $\bar{u}$ et une sous-solution $\underline{u}$ telles que $\underline{u} \leq \bar{u}$ dans $\bar{\Omega}$. Alors, le problème (S) admet une solution classique u telle que $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ dans $\bar{\Omega}$.

Lemme (6)

Si f est décroissane par rapport à la seconde variable dans $(0, \infty)$, alors le problème (S) a au plus une solution $u \in C(\overline{\Omega}) \bigcap C^{2+\gamma}(\Omega)$.

Résultats principaux

Théorème (1)

Assumons (H_4). *Pour* $\sigma < 1$, *le problème* (Q) *admet une unique solution vérifiant pour tout* $x \in \Omega$

$$u(x) \approx \theta_\sigma(x).$$

Résultats principaux

Théorème (2)

Sous les hypothèses $(\mathbf{H_3})$ *et* $(\mathbf{H_4})$*. Alors le problème* (P) *admet une solution* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2+\gamma}(\Omega)$ *vérifiant*

$$c_1\theta_{\sigma_1}(x) \leq u(x) \leq c_2\theta_{\sigma_2}(x),$$

où $c_1, c_2 > 0$.

Idée de la preuve

Soit les constantes $0 < c_1 < c_2$, telles que

$$c_1 u^{\sigma_1} \leq f(u), \quad \text{si} \;\; 0 < u \leq 1 \quad \text{et} \;\; f(u) \leq c_2 u^{\sigma_2}, \quad \text{si} \;\; u > 0.$$

Il existe $c > 0$ tel que

$$\frac{1}{c} p(x) \leq q(x) \leq c p(x),$$

Considérons les problèmes non linéaires suivants

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{c_1}{c} p(x) u^{\sigma_1}, & x \in \Omega, \\ u > 0 \;\; \text{dans} \;\; \Omega, & u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta u = c_2 c p(x) u^{\sigma_2}, & x \in \Omega, \\ u > 0 \;\; \text{dans} \;\; \Omega, & u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Idée de la preuve

Soit les constantes $0 < c_1 < c_2$, telles que

$$c_1 u^{\sigma_1} \leq f(u), \quad \text{si} \;\; 0 < u \leq 1 \quad \text{et} \;\; f(u) \leq c_2 u^{\sigma_2}, \quad \text{si} \;\; u > 0.$$

Il existe $c > 0$ tel que

$$\frac{1}{c} p(x) \leq q(x) \leq c p(x),$$

Considérons les problèmes non linéaires suivants

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{c_1}{c} p(x) u^{\sigma_1}, & x \in \Omega, \\ u > 0 \;\; \text{dans} \;\; \Omega, & u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta u = c_2 c p(x) u^{\sigma_2}, & x \in \Omega, \\ u > 0 \;\; \text{dans} \;\; \Omega, & u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Idée de la preuve

Théorème 1 $\Longrightarrow \exists\ u_1$ et u_2 solutions respectivement de (1) et (2) verifiant

$$\frac{1}{k_1}\theta_{\sigma_1}(x) \leq u_1(x) \leq k_1\theta_{\sigma_1}(x)$$

$$\frac{1}{k_2}\theta_{\sigma_2}(x) \leq u_2(x) \leq k_2\theta_{\sigma_2}(x),$$

avec $k_1, k_2 > 0$.

Idée de la preuve

Lemme (7)

Il existe $k > 0$ *tel que pour tout* $x \in \Omega$, *on a :*

$$\theta_{\sigma_1}(x) \leq k\theta_{\sigma_2}(x).$$

On pose $m = \max(1, kk_1k_2)$,

$$\underline{u} := \min(1, \frac{1}{\|u_1\|_\infty})u_1 \quad \text{et} \quad \bar{u} := mu_2.$$

Idée de la preuve

Lemme (7)

Il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$\theta_{\sigma_1}(x) \leq k\theta_{\sigma_2}(x).$$

On pose $m = \max(1, kk_1k_2)$,

$$\underline{u} := \min(1, \frac{1}{\|u_1\|_\infty})u_1 \quad \text{et} \quad \bar{u} := m u_2.$$

Idée de la preuve

Alors $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont respectivement sous et sursolution du problème (P) vérifiant

$$\underline{u} \leq \bar{u}.$$

$$\Downarrow$$

(P) possède une solution classique u vérifiant

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u}.$$

Merci pour votre attention.

Application

Soit la fonction

$$f(t) := \begin{cases} \frac{2\pi}{3t} + 3\pi t, & si \quad t \in (0, \frac{1}{3}], \\ 3\pi + \sin 3\pi t, & si \quad t \in (\frac{1}{3}, 1], \\ \frac{3\pi}{t}, & si \quad t \in (1, \infty). \end{cases}$$

On a $f \in C^1(0, \infty)$ vérifiant

$$t^{\frac{1}{2}} \leq f(t) \text{ si } 0 < t \leq 1 \text{ et } f(t) \leq (3\pi + 1)\frac{1}{t} \text{ si } t > 0.$$

Application

On considère la fonction

$$q(x) = (|x|-a)^{-2}(b-|x|)^{-\lambda}\left(\log(\frac{3(b-a)}{|x|-a})\right)^{-2}\left(\log(\frac{3(b-a)}{b-|x|})\right)^{-\mu},$$

avec $\lambda \leq 2$ et μ vérifiant l'une de ces deux conditions

- $\lambda < 2$ et $\mu \in \mathbb{R}$.
- $\lambda = 2$ et $\mu > 1$.

Application

Soit le problème suivant $(\beta < 1)$.

$$(R)\begin{cases} -\Delta u + \frac{\beta}{u}|\nabla u|^2 = q(x)f(u), \ x \in \Omega, \\ u > 0 \ \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

Le problème (R) admet une solution classique u vérifiant pour $x \in \Omega$

$$\frac{1}{c}(\theta_{\sigma_1}(x))^{\frac{1}{1-\beta}} \leq u(x) \leq c(\theta_{\sigma_2}(x))^{\frac{1}{1-\beta}},$$

où c est une constante positive .

$$\theta_{\sigma_i}(x) := \left(\log(\frac{3(b-a)}{|x|-a})\right)^{\frac{-1}{1-\sigma_i}} \varphi_{\sigma_i}(x),$$

avec

Application

$$
\varphi_{\sigma_i} := \begin{cases}
\left(\log\left(\frac{3(b-a)}{b-|x|}\right)\right)^{\frac{1-\mu}{1-\sigma_i}}, & \textit{if } \lambda = 2 \textit{ and } \mu > 1, \\
(b-|x|)^{\frac{2-\lambda}{1-\sigma_i}} \left(\log\left(\frac{3(b-a)}{b-|x|}\right)\right)^{\frac{-\mu}{1-\sigma_i}}, & \textit{if } 1+\sigma_i < \lambda < 2, \\
b-|x|, & \textit{if } \lambda = 1+\sigma_i \textit{ and } \mu > 1, \\
(b-|x|) \left(\log\left(\log \frac{3(b-a)}{b-|x|}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_i}}, & \textit{if } \lambda = 1+\sigma_i \textit{ and } \mu = 1, \\
(b-|x|) \left(\log\left(\frac{3(b-a)}{b-|x|}\right)\right)^{\frac{1-\mu}{1-\sigma_i}}, & \textit{if } \lambda = 1+\sigma_i \textit{ and } \mu < 1,
\end{cases}
$$