
Le calcul matriciel dans sa double dimension outil-objet

Mémoire réalisé par Anaïs LEURART
pour l'obtention du diplôme de Master en sciences mathématiques

Année académique 2010-2011

Service : didactique des mathématiques

Directeur : Stéphanie BRIDOUX

Rapporteurs : Catherine FINET et Maja VOLKOV

Remerciements

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce travail.

Je tiens à remercier tout particulièrement :

Madame Bridoux, qui, en tant que Directrice de mémoire, s'est toujours montrée à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce travail, ainsi que pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'elle a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour ;

Madame Finet et Madame Volkov, qui ont lu ce mémoire ;

Le corps enseignant de l'Athénée Royal de Thuin ainsi que les élèves de 6^e année qui m'ont permis d'expérimenter les propos tenus dans ce travail ;

Mon amie Louise et mes proches, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Introduction	5
1 Contexte du travail	6
2 Problématique	8
3 Éléments de la théorie de l'activité	12
3.1 Mécanismes de construction des connaissances	12
3.1.1 Constructivisme de Piaget	13
3.1.2 Le point de vue de Vygotski	13
3.1.3 Spécification à la didactique des mathématiques	14
3.2 Tâche et activités	14
3.3 Conceptualisation en mathématiques	15
3.4 Méthodologie d'analyse des activités possibles des élèves	17
3.4.1 Analyse des contenus	17
3.4.2 Analyse des déroulements	21
3.4.3 Discours de l'enseignant	23
3.4.4 Reconstitution des activités des élèves	25
3.5 Lien avec la problématique	25
4 Difficultés des étudiants à l'université	27
4.1 Nouvelles pratiques attendues	27
4.2 L'obstacle du formalisme	30
4.3 Les registres de représentation	33
4.4 Lien avec la problématique	34
5 Les matrices dans un domaine appliqué : Google	35
5.1 Explications de base	35
5.1.1 Classement des pages web	35
5.1.2 Résolution matricielle	37
5.1.3 Perturbation du modèle	38
5.1.4 Existence et unicité de la solution	38

5.1.5	Calcul effectif des scores	39
5.2	Statut de la nouvelle notion	39
5.3	Scénario	40
5.4	Analyse de la tâche	48
5.4.1	Bilan	52
5.5	Expérimentation	53
5.5.1	Description globale	53
5.5.2	Analyse des déroulements	54
5.6	Bilan	65
6	Formalisme et exigences universitaires : expérimentation en BAC1	67
6.1	Méthodologie	68
6.2	Tâche 1	68
6.2.1	Analyse a priori	69
6.2.2	Nouvelles pratiques attendues	69
6.2.3	Analyse des productions	70
6.3	Tâche 2	72
6.3.1	Analyse a priori	73
6.3.2	Nouvelles pratiques attendues	74
6.3.3	Analyse des productions	74
6.4	Tâche 3	76
6.4.1	Analyse a priori	76
6.4.2	Nouvelles pratiques attendues	77
6.4.3	Analyse des productions	77
6.5	Bilan	78
7	Conclusion générale	81
	Bibliographie	84
	Annexes	87
	I. Programme de la Communauté française	87
	II. Google et les probabilités	88

Introduction

Ce mémoire vise à mieux comprendre l'enseignement du calcul matriciel à partir d'un questionnaire développé dans le champ de la didactique des mathématiques. À partir de mon expérience personnelle, je développe au chapitre 1 les origines, ou causes, de ce choix initial.

Le chapitre 2 présente quelques travaux antérieurs. Je montre comment ceux-ci amènent des pistes à développer, certaines plus "applicables" que d'autres au calcul matriciel. Ils m'ont conduite à définir des questions à étudier et je montrerai que la problématique nécessite une analyse à deux dimensions.

Les outils théoriques visant à aborder mon questionnaire sont développés dans deux chapitres : la théorie de l'activité au chapitre 3 et les difficultés des étudiants à l'université au chapitre 4.

Ce travail prend ensuite une direction plus pratique puisque deux expérimentations sont menées afin de répondre au questionnaire établi dans la problématique. La première concerne des élèves du niveau secondaire, soumis à une leçon autour du moteur de recherches Google : elle est décrite au chapitre 5. La seconde est réalisée auprès d'étudiants à l'université suivant le cours de Mathématiques élémentaires et fait l'objet du chapitre 6.

Enfin, le 7^e et dernier chapitre apportera des éléments de réponses à la problématique : il s'agit de la conclusion générale.

Chapitre 1

Contexte du travail

La première réflexion liée à l'élaboration du mémoire a été le choix de son thème général. Je devais déterminer un domaine des mathématiques présentant un intérêt particulier dans l'enseignement. Presque immédiatement, une notion s'est détachée des autres : le calcul matriciel. Les raisons de cette sélection découlent d'un constat initial : cette matière est inédite et isolée. En effet, elle est totalement neuve en ce sens qu'elle ne repose pas sur d'anciennes connaissances comme c'est souvent le cas dans l'organisation du cours de mathématiques, où les concepts sont plus ou moins liés. Concrètement, les seules informations utiles à détenir concernent les nombres réels et les opérations associées mais le savoir peut être sommaire : il n'est pas indispensable de comprendre toutes les propriétés des réels pour aborder le calcul matriciel, seule la manipulation des bases est nécessaire. Ensuite, cette matière apparaît comme isolée dans la mesure où, dans le secondaire, les matrices ne seront plus réutilisées une fois le chapitre clos : elles ne sont traitées que pour elles-mêmes et n'interviennent pas dans le reste du cours alors qu'elles sont en réalité utiles dans plusieurs domaines scientifiques comme par exemple les programmes informatiques et le stockage de données en biologie. Une application est toutefois proposée au travers de la résolution de systèmes d'équations mais là encore, cette méthode de résolution est interne au chapitre sur les matrices et fait surtout intervenir le déterminant et les formules de Cramer associées.

Ces premiers constats relèvent tout d'abord d'une approche antérieure menée dans le cadre d'un cours d'agrégation intitulé "Microenseignement". Dit brièvement, il s'agit d'une simulation d'une heure de cours dans le secondaire : le principe est de se mettre dans la peau d'un enseignant en préparant une leçon de quarante minutes. Celle-ci est donnée aux autres personnes préparant l'agrégation qui sont considérées (et se comportent) comme des élèves. C'est donc dans ces conditions que je me suis penchée pour la première fois sur le choix d'une matière mathématique vue dans le secondaire. Ma décision a été conditionnée par le fait

que la présentation de la leçon se réalisait auprès de personnes d'horizons divers tels que la chimie et la biologie. Je souhaitais donc trouver une matière ne nécessitant que peu de prérequis afin que tout le monde puisse suivre le cours. En consultant les programmes et en gardant en tête cette contrainte, mon choix s'est porté sur le calcul matriciel.

La seconde origine de ma décision provient de mon expérience personnelle en tant qu'élève du secondaire. Ce chapitre m'a effectivement marquée par son côté technique et inexploré... Plus précisément, les notions vues sont restées dans le domaine calculatoire et la seule "application" proposée a été la résolution de systèmes. Les matrices m'ont parues comme un aparté ou une annexe insérée dans mon cours de mathématiques. Elles n'ont été vues que dans le but d'effectuer quelques calculs et opérations. Toutefois, cela n'a pas impliqué la simplicité de l'apprentissage : une avalanche de définitions et propriétés nouvelles ont accompagné son enseignement. Cette masse d'informations m'avait d'ailleurs désarçonnée lors de la première interrogation durant laquelle je m'étais retrouvée perdue en mélangeant tout ce "nouveau". Ce souvenir m'a poussée à croire que ce sujet pouvait receler des difficultés d'enseignement.

De plus, ayant vécu une expérience délicate avec le calcul matriciel, j'aurais dû faire en sorte que le "Microenseignement" se déroule en tenant compte de mes propres difficultés de départ. Malgré mes appréhensions, je n'ai pas été capable d'en modifier l'approche : je n'ai fait que reproduire mon ressentiment en donnant un cours très théorique. En conclusion, même en étant consciente des éventuelles difficultés liées à cette notion, je n'ai pas été en mesure de trouver un autre moyen de l'aborder. Mon manque d'expérience avec le métier d'enseignant n'a probablement pas non plus contribué à construire une séquence de cours prenant en compte les difficultés pressenties. En tout cas, cette sensation de blocage avec le côté pratique des matrices m'a également interpellée.

Dès lors, de nombreuses questions se sont bousculées... D'un point de vue mathématique, comment se passe la transition entre le secondaire et l'université? Quelles sont les difficultés rencontrées par les élèves? Sont-elles les mêmes dans les différents niveaux d'études? N'y a-t-il pas un moyen de présenter autrement les matrices dans le secondaire? De manière plus générale, qu'est-ce que la didactique des mathématiques peut m'apporter pour mieux comprendre l'enseignement de cette matière? Une première approche, qui permet de préciser ce questionnement, consiste à consulter les programmes de cours ainsi que des travaux antérieurs de didactique. Il s'agit de l'objet du chapitre 2.

Chapitre 2

Problématique

Comme je l’ai expliqué dans le contexte du travail, j’ai tout d’abord recherché des travaux antérieurs en didactique des mathématiques concernant le calcul matriciel. Malheureusement, il est apparu que ce thème était peu traité : seuls quelques travaux ont été trouvés et rares sont ceux qui s’intéressent strictement à cette matière. En effet, elle est généralement englobée dans l’algèbre linéaire dont les caractéristiques et difficultés associées ne s’appliquent pas toujours au calcul matriciel. Ils apportaient certes des informations intéressantes mais ils n’étaient pas assez précis pour me permettre de construire directement ma problématique.

Je me suis alors penchée sur les sources les plus spécifiques que j’ai pu recueillir, provenant des travaux de Tanguay et Corriveau (2007). Ceux-ci ont travaillé sur le thème du formalisme, c’est-à-dire le langage mathématique comprenant aussi bien des symboles que des phrases, en algèbre linéaire. Ils ont analysé tous les exercices de démonstration proposés à des étudiants de première année à l’université, dans le cours d’algèbre linéaire. Celles-ci ont été classées en différentes catégories dont une dans le cadre de l’étude des matrices et des déterminants. Ils y ont répertorié des erreurs fréquentes supposées dues à l’accumulation de nouveautés et à l’utilisation erronée de ”l’algèbre classique”. Par exemple, les élèves appliquaient les règles des exposants des réels à l’inverse et la transposée d’une matrice car ils ne cernaient pas ce que représentent les notations A^t et A^{-1} lorsque A est une matrice. Ces constats permettent aux enseignants de mieux connaître les erreurs récurrentes des élèves et leur donneront l’occasion d’insister sur ces difficultés lors du cours, ce qui peut favoriser l’apprentissage des élèves. Par contre, ces informations ne m’ont pas donné les moyens d’amorcer directement le mémoire car je ne suis pas parvenue à en dégager un questionnement : au delà des exemples cités, je ne voyais aucun prolongement possible. Toutefois, un de leur constat m’a semblé intéressant : ils associent les difficultés répertoriées chez les étudiants à l’*obstacle du formalisme*. Celui-ci se manifeste chez les étudiants opérant sur la forme des expressions, sans

considérer celles-ci comme faisant référence à autre chose qu'à elles-mêmes. Par exemple, A^t ne correspond pas à "A exposant t" comme l'algèbre le suggère au départ mais bien à une matrice A sur laquelle on applique une permutation des lignes et des colonnes : les étudiants ne le prenant pas en compte peuvent, comme précédemment cité, utiliser à tort la règle des exposants.

Les travaux sur l'enseignement de l'algèbre linéaire, menés par Dorier et al. (1997), ont permis de préciser l'obstacle du formalisme. Ils contiennent toute une série de difficultés relatives à certaines caractéristiques de l'algèbre linéaire mais beaucoup ne concernent pas le calcul matriciel. Tout comme chez Tanguay et Coriveau(2007), seul l'obstacle du formalisme a pu être retenu. Ils ont par exemple montré que lors d'une tâche de démonstration, plusieurs étudiants ont confondu le cofacteur associé à un élément d'une matrice et la matrice des cofacteurs. Il y a donc confusion entre un nombre et une matrice. Toutefois, les difficultés liées à ce sujet ne peuvent être repérées qu'au niveau universitaire : avant, il ne s'agit, concrètement, que de calculs n'étant pas affectés par un quelconque formalisme. Dès lors, le cas de l'université devra être analysé à part de celui du secondaire. Il reste à préciser quelles directions ils prendront.

Pour l'université, le thème général concerne le sens que donnent les étudiants au formalisme associé au calcul matriciel. Plus précisément, l'obstacle du formalisme est contextualisé aux matrices et le but du travail est d'en vérifier l'impact sur les étudiants. Le questionnement est donc le suivant : quelle forme prend l'obstacle du formalisme dans le cas du calcul matriciel et peut-on le mettre en lien avec les erreurs observées chez les étudiants ? Le moyen utilisé pour y répondre est le cours de Mathématiques élémentaires donné en BAC1 puisqu'il se compose d'un chapitre sur les matrices. Or, de nombreux tests y sont réalisés, ce qui constitue un bon bagage d'exercices à analyser.

Maintenant que le problème à l'université est cerné, il reste à définir le contexte du secondaire. Comme les textes didactiques n'ont pas apporté assez d'éléments, seul le programme était à ma disposition pour avancer. J'ai consulté celui de la Communauté française¹ selon lequel les matrices sont enseignées en 5^e année du secondaire, 6 heures de mathématiques par semaine. Il y est stipulé que les compétences à atteindre ne sont autres que des applications de définitions/propriétés sur des matrices dont la dimension ne dépasse pas 3 : "effectuer des calculs où interviennent des matrices, utiliser une matrice pour décrire une transformation élémentaire, pour modéliser une situation ou résoudre des systèmes d'équations linéaires". Par conséquent, les connaissances à voir sont la transposée, la somme,

1. Annexe I

l'opposé, le produit d'une matrice par un nombre réel, le produit de deux matrices et l'inverse. Mais ce n'est pas tout, il y a également tout ce qui concerne le déterminant avec la définition, son calcul avec la règle de Sarrus, la règle des mineurs et ses propriétés. Dès lors, les hypothèses émises dans le contexte sont confirmées : le chapitre "calcul matriciel" comporte de nombreuses définitions et propriétés mais ne propose pas d'utilisation des matrices hormis dans la résolution de systèmes d'équations, ce qui est loin de paraître utile aux yeux des élèves. Mon expérience n'était donc pas un cas isolé : c'est le programme qui génère cette situation théorique.

À présent, les deux directions que va prendre le mémoire sont claires : un questionnement sur l'obstacle du formalisme à l'université et un autre sur l'utilisation des matrices dans le secondaire. La problématique est donc elle aussi scindée. Un premier questionnement concerne les difficultés dues au formalisme associé aux matrices, rencontrées par les étudiants à l'université : peut-on justifier les erreurs des étudiants par le manque de sens qu'ils donnent au formalisme des matrices ? Dans le cas de l'enseignement secondaire, on peut se demander s'il est possible de donner une autre dimension au calcul matriciel en proposant aux élèves une utilisation concrète de celui-ci. Autrement dit, existe-t-il un problème pour lequel le calcul matriciel sera un outil de résolution optimal ?

Alors que cette dernière question était ouverte, un séminaire organisé par le CREM (Centre de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques) en novembre 2010 a permis de préciser ce questionnement grâce à *la matrice cachée de Google* présentée par Michel Rigo de l'Ulg. Ce dernier y a expliqué, de manière assez simple et intuitive, comment les créateurs de Google avaient débuté leur algorithme de tri des pages internet. Je me suis alors rendue compte qu'ils utilisaient des mathématiques tout à fait abordables faisant intervenir, entre autres, les matrices. Une parfaite utilisation des matrices se présentait alors à moi et l'objectif est donc devenu clair : adapter le fonctionnement de Google afin d'obtenir un cours pouvant être donné à des élèves de 5^e ou 6^e secondaire.

Pour aborder cette problématique, différents outils théoriques doivent être mis en place. Tout d'abord, je vais développer au chapitre 3 les éléments principaux de la théorie de l'activité, qui vont me permettre de traiter le cas de l'enseignement secondaire. Elle va en effet m'apporter des moyens pour caractériser l'impact de la leçon que je proposerai aux élèves mais également une analyse préalable des questions ayant pour but de définir "ce que les élèves seront censés faire". Ensuite, le niveau universitaire sera étudié au chapitre 4 avec une base de difficultés recensées par des didacticiens, dont l'obstacle du formalisme. Il fera également intervenir des

informations provenant de la théorie de l'activité afin de caractériser les exercices de Mathématiques élémentaires utilisés pour l'expérimentation.

Chapitre 3

Éléments de la théorie de l'activité

Afin d'aborder la réalisation d'un cours autour de Google, j'ai choisi le cadre théorique de la théorie de l'activité. Celle-ci va me permettre d'étudier aussi bien le contenu que le déroulement de la leçon. Avant toute chose, elle est un élément décisif dans la construction d'une leçon pourvue d'intérêt pour les apprentissages des élèves : elle fournit en effet un moyen de caractériser l'impact des exercices sur les élèves avant de les leur présenter. Ensuite, elle apporte une méthodologie d'analyse du déroulement de la leçon ayant pour but d'étudier des éléments sur le travail effectué par les élèves, ce qui n'est pas chose facile à atteindre.

Je ne vais pas décrire ici tous les aspects de la théorie de l'activité mais en développer les fondements et les éléments clés ainsi que tout ce qui est en lien avec les questions développées dans ce mémoire.

3.1 Mécanismes de construction des connaissances

La théorie de l'activité exploitée en didactique des mathématiques s'appuie sur deux théories issues de la psychologie du développement. La première, définie par Piaget (1896-1980), affirme que les connaissances se construisent par le développement de mécanismes internes alors que la seconde, menée par Vygotski (1896-1934), lie la construction des connaissances à l'interaction sociale et à la médiation d'instruments psychologiques. Je vais, ci-dessous, décrire brièvement les éléments principaux de chaque théorie.

3.1.1 Constructivisme de Piaget

Selon Piaget, les connaissances sur les objets se construisent grâce aux actions sur ces derniers : des actes physiques et/ou des opérations mentales. Il suggère en effet que l'élaboration d'une nouvelle manière de penser ne s'opère pas par la simple écoute d'un discours : il est indispensable que l'élève éprouve par lui-même l'insuffisance de ses connaissances antérieures et construise alors le nouveau. Les actions dépendent donc des objets choisis mais également de la structure des connaissances des sujets. En effet, lorsqu'un sujet agit sur des objets pour lesquels il possède certaines connaissances, il sera souvent amené à les restructurer selon la situation. Or, cette restructuration des connaissances est menée par deux mécanismes : assimilation/accommodation et déséquilibre/rééquilibré. Plus précisément, l'objet traité peut amener un nouveau questionnement et/ou une mise en parallèle avec d'autres objets et cette situation peut conduire à des contradictions. Lorsque les élèves auront réorganisé leurs connaissances pour expliquer ces contradictions, ils atteindront un nouvel équilibre. Autrement dit, la connaissance bascule d'un état d'équilibre à un autre en passant par une phase de remise en questions.

3.1.2 Le point de vue de Vygotski

Vygotsky (ainsi que Leontiev (1903-1979) par la suite) fait quant à lui intervenir les relations socio-culturelles entre les individus : l'apprentissage est un processus entre l'enfant et l'adulte, ce dernier étant considéré comme intermédiaire pour acquérir des connaissances.

Selon lui, deux types de concepts sont à envisager : les concepts quotidiens, dûs aux interactions sociales de la vie quotidienne, et les concepts scientifiques, enseignés dans le cadre scolaire. Ceux-ci se développent en interaction dans un processus de "double germination". La première concerne les concepts quotidiens : elle se fait du bas vers le haut ou autrement dit du particulier vers le général via l'interaction avec les objets du monde de l'action (comme Piaget). La seconde, pour les concepts scientifiques, se réalise de manière inverse en passant du général vers le particulier.

Ces deux germinations sont en interaction. En effet, les concepts quotidiens apportent une base à la germination scientifique car des problèmes de "la vie de tous les jours" servent souvent d'encrage aux notions scientifiques. Or, les concepts scientifiques propulsent les concepts quotidiens dans leur germination en présentant une organisation et une médiation : une explication scientifique permet de comprendre les concepts quotidiens. De plus, ces deux types de concepts peuvent se

rencontrer et engager deux processus : c'est l'acquisition opérationnelle. Le premier processus est une réorganisation des concepts quotidiens et le second consiste en une prise de signification des concepts scientifiques pour devenir des concepts pour l'action.

Cette interaction s'appuie sur ce qu'on appelle la *zone proximale de développement (ZPD)*. Il s'agit d'un concept modélisant la frontière entre les capacités de l'enfant travaillant de manière autonome et ce qu'il peut faire avec l'aide d'une personne expérimentée dans le domaine considéré. Dès lors, les apprentissages se construisent uniquement dans la zone proximale de développement : au delà de la ZPD, les aides n'amèneront qu'un effet de copie immédiate alors qu'en deçà de la ZPD, l'enfant n'apprendra aucune nouveauté.

3.1.3 Spécification à la didactique des mathématiques

Les processus expliqués dans ces deux théories ont été spécifiés et contextualisés à l'enseignement des mathématiques par une lignée de chercheurs inspirés par Vergnaud, investigateur de ces études. Dans le cadre de la didactique des mathématiques, le constructivisme piagétien est symbolisé par l'importance accordée à la construction progressive et autonome des connaissances des élèves. Quant au point de vue de Vygotski, il est évoqué par l'accent mis sur l'impact de l'action didactique ainsi qu'avec l'utilisation de la ZPD : si des liens sont élaborés entre les connaissances, cela permet une plus grande "accroche" et favorise le développement. De plus, si les nouvelles connaissances sont proches des anciennes sur lesquelles elles se construisent, le savoir exposé par l'enseignant peut être acquis par imitation.

3.2 Tâche et activités

Les notions centrales de la théorie de l'activité sont celles de "tâche" et d' "activités". La tâche représente ce qui est à faire, comme par exemple l'énoncé d'un exercice, alors que les activités sont ce que développe un sujet lors de la réalisation de la tâche. Autrement dit, une tâche décrit un énoncé mathématique proposé aux élèves. Celui-ci déclenche des activités mathématiques qui englobent leurs "actes observables" (ce qu'ils font/disent ou ne font/disent pas) mais également ce qui ne peut être vu mais qui entre en compte dans leur travail : les discussions sur la tâche entre élèves ou encore leurs pensées.

La théorie de l'activité, spécifiée à l'enseignement des mathématiques, émet l'hypothèse que les activités des élèves peuvent engendrer des connaissances mathématiques. Dès lors, l'intermédiaire choisi pour étudier les liens entre enseignement et apprentissage est l'ensemble des activités des élèves. En effet, celles-ci vont permettre, ou non, des apprentissages notamment par les processus cognitifs et psychologiques décrits par Piaget et Vygotski.

Se pose alors le problème d'accéder à ces activités. Étant donné leur rôle dans l'apprentissage, il est logique de vouloir les caractériser. Cependant, cette manœuvre est loin d'être simple : comment savoir ce que pensent les élèves ? Nous verrons dans la section portant sur l'analyse des déroulements que, faute d'informations pouvant être recueillies par observation, nous devons restreindre notre analyse aux *activités possibles* des élèves. Celles-ci seront définies par la suite.

De plus, comment décrire les apprentissages des élèves en fonction des activités observées en classe ? Comment caractériser leur compréhension ? Pour cela, je vais tout d'abord préciser ce que j'entends par "comprendre" en mathématiques.

3.3 Conceptualisation en mathématiques

La conceptualisation en mathématiques ou encore la compréhension est perçue différemment selon les didacticiens considérés.

La notion de concept apparaît tout d'abord dans la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990). Selon lui, conceptualiser signifie donner du sens. Il définit un concept C comme étant un triplet (S, I, \mathcal{L}) où S est l'ensemble des situations donnant du sens au concept (le référent), I est l'ensemble des invariants (sur lesquels repose l'opérationnalité des schémas : c'est le signifié) et \mathcal{L} est l'ensemble des formes langagières et non langagières permettant de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant). Par exemple, le concept de "droite" en géométrie euclidienne se construit dans des situations diverses telles que des problèmes de constructions géométriques ou de reconnaissance (par exemple, voir si deux droites sont perpendiculaires), l'utilisation des propriétés du concept pour résoudre d'autres questions, le travail sur les équations, etc... Les invariants sont les axiomes, définitions, propriétés caractéristiques et théorèmes qui concernent le concept de droite : par exemple, "deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles", vu début du secondaire ; chacun de ces invariants est plus ou moins fonctionnel selon le type de situation considéré. Les signifiants sont les équations, les représentations gra-

phiques, l'équerre comme outil de construction, etc.

La conceptualisation en mathématiques, telle que définie par Douady (1994), est la prise de sens des notions en tant qu'objet et outil. Selon elle, savoir des mathématiques revêt un double aspect. Premièrement, c'est disposer de notions et théorèmes mathématiques pour résoudre des problèmes, interpréter de nouvelles questions. Dans cette optique, les notions et théorèmes ont le statut d'outil puisqu'ils sont utilisés dans la réalisation d'un travail (mathématique). Les outils sont inscrits dans un contexte, sous l'action et le contrôle d'une personne ou d'un groupe à un moment donné. Les situations ou les problèmes dans lesquels évoluent des notions mathématiques sont générateurs de sens pour ces notions d'un certain point de vue que nous appellerons sémantique. Le second critère est l'identification des notions et des théorèmes comme éléments d'un corpus scientifiquement et socialement reconnu. C'est aussi formuler des définitions, énoncer des théorèmes du corpus et les démontrer. Dans ce cas, les notions et théorèmes mathématiques ont le statut d'objet. Les notions sont décontextualisées et le travail de recontextualisation, c'est-à-dire le traitement des problèmes, permet d'élargir le sens des notions. Dès lors, l'apprentissage d'un élève correspond à son implication dans une activité intellectuelle dont la conséquence est la disponibilité d'un savoir avec son double statut outil et objet. De plus, le travail mathématique réalisé sur les outils et les objets nécessite de respecter un ensemble de règles internes aux mathématiques et différents modes d'expression : il s'agit d'une autre composante du sens appelée syntaxique. Enfin, Douady a également introduit la notion de cadre et registre. Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations et des images mentales associées à ces objets et ses relations. Par exemple, le cadre géométrique, le cadre algébrique, le cadre arithmétique, le cadre des fonctions, le cadre de la géométrie analytique... Le changement de cadres conduit les élèves à des activités de transfert et de réinvestissement de connaissances. Un registre est quant à lui un ensemble cohérent de modes d'écritures permettant de désigner un objet. On définit par exemple le registre graphique, le registre numérique, le registre de la langue naturelle, le registre symbolique,... La notion de fonction peut par exemple être traitée dans ces différents registres ($f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 2x$ est du registre symbolique, son graphe est du registre graphique, ...). Les changements de registres sont une nécessité pour l'accès au sens, à la conceptualisation.

Robert (1998) se place dans le même contexte que Douady mais ajoute que les adaptations à apporter aux connaissances, c'est-à-dire la manière d'utiliser ces connaissances dans un exercice ou un problème, participent également à la conceptualisation. L'activité mathématique est en effet une activité d'adaptations telles

que faire des mises en relation entre les notions, interpréter des hypothèses, utiliser des exemples de référence pour répondre à une question... Dès lors, décrire les adaptations va permettre de préciser les connaissances à mettre en fonctionnement dans les tâches. Cette description, développée dans la section suivante, permettra de caractériser les activités des élèves et donc leurs apprentissages.

3.4 Méthodologie d'analyse des activités possibles des élèves

Afin d'approcher au mieux la conceptualisation des élèves, une caractérisation de leurs activités en classe est nécessaire étant donné qu'elles correspondent à l'intermédiaire entre l'enseignement et les apprentissages. Pariès, Robert et Rogalski (2007) ont alors mis au point une méthodologie d'analyse des activités des élèves en classe. Celle-ci prend en compte aussi bien les contenus à enseigner (et donc ce qui précède l'enseignement) que les déroulements en classe. Du côté des contenus, une analyse a priori des exercices proposés permet de préciser le travail attendu. Le choix de s'intéresser aux exercices vient du fait qu'il s'agit d'une phase de l'enseignement qui peut amener de la variabilité dans les activités puisqu'elle est régie par le comportement des élèves et par la gestion de la classe par l'enseignant. Pour le déroulement, les activités sont étudiées par le biais des éléments pouvant modifier la tâche prévue : les interventions du professeur et donc les changements de gestion et les aides qu'il apporte ainsi que le comportement des élèves (leurs connaissances, participations, ...).

Dans cette section, je vais préciser ce qui permet de mener ces analyses tant du point de vue des contenus que des déroulements en m'appuyant sur des éléments susceptibles d'influencer les activités des élèves en classe.

3.4.1 Analyse des contenus

L'importance d'une analyse en amont de l'enseignement a déjà été évoquée : elle permet d'évaluer l'impact d'une tâche sur les apprentissages des élèves, vue a priori, et de le comparer à ce qu'il se passe réellement au niveau de leurs activités. Dès lors, pour mieux appréhender une notion, différents aspects peuvent être caractérisés.

Statut des notions

En s'appuyant sur la distance qu'il existe, dans l'introduction d'une notion, entre les nouvelles connaissances et celles déjà présentes dans le bagage des élèves, on constate que le "nouveau" présente des caractères différents par rapport à l'ancien :

Le *caractère généralisateur* se dessine lorsque le nouveau étend l'ancien ou encore lorsque le particulier se généralise. Par exemple, le produit scalaire vu dans le plan se généralise dans l'espace.

Le *caractère formalisateur* se traduit par l'apparition d'un formalisme nouveau ou développé, ce que la notion d'intégrale illustre puisqu'elle peut s'introduire comme formalisant ce qui permet de calculer l'aire sous une courbe. De plus, certaines notions ont parfois plusieurs formalisations co-existantes, c'est le cas du cosinus qui se retrouve dans la trigonométrie avec le triangle rectangle, le produit scalaire et dans les fonctions.

Les *notions non encore formalisées* à un niveau de la scolarité. Par exemple, la logique n'est pas formalisée en secondaire alors qu'elle est implicitement utilisée.

Le *caractère unificateur* indique que le nouveau englobe plusieurs éléments anciens. Cette unification peut permettre une simplification ou une confusion. Par exemple, les fonctions unifient les résolutions d'équations, les graphiques, les dérivées, les intégrales, ...

La combinaison de ces différents caractères amène à un classement par types de notions : les extensions de concepts (avec ou sans accidents), les Réponses À un Problème (appelées notions RAP) et les notions Formalisatrices, Unificatrices, Généralisatrices (FUG).

Le premier type concerne les notions (objets, théorèmes, ...) qui étendent des notions plus anciennes, soit par généralisation, soit par traduction à l'aide d'un nouveau formalisme. Celles-ci peuvent être "sans accident" (il y a congruence du travail entre le nouveau et l'ancien) ou "avec accidents" (un changement intervient dans le travail du nouveau et de l'ancien). Par exemple, la multiplication des nombres entiers est une extension de celle des naturels sans accident car il s'agit de la même opération à laquelle s'ajoute "la multiplication des signes". Par contre, l'inverse d'une matrice est une extension avec accidents de l'inverse d'un réel puisqu'il ne s'agit plus d'une simple division pour le trouver : le travail de recherche est totalement différent.

Viennent ensuite les notions présentant deux caractères : généralisateur/unifi-

cateur ou unificateur/formalisateur. Elles peuvent souvent être introduites comme réponse à un problème et sont alors appelées notions RAP. Par exemple, le théorème de Pythagore permet de donner une relation générale entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle, unifiant aussi toutes les situations ou problèmes faisant intervenir ce théorème. On peut l'introduire comme réponse à un problème : celui de caractériser les côtés d'un triangle rectangle.

Enfin, les notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices possèdent les trois caractères à la fois : c'est le cas de la convergence des suites, identifiée par Robert(1998), et des espaces vectoriels, déterminés par Dorier(1997).

Scénario

Un scénario reprend tout ce qui compose la leçon considérée pour l'analyse. Il comprend donc le cours, les exercices, les évaluations éventuelles ainsi que la gestion prévue par l'enseignant. Il s'agit en fait d'une préparation complète du cours qui influencera forcément les apprentissages que les élèves sont susceptibles de réaliser. Grâce à lui, les connaissances des élèves et les énoncés des exercices sont déterminés et l'analyse a priori, définie ci-dessous, peut s'opérer. L'élaboration d'un scénario est donc un autre élément ayant un rôle dans l'analyse des contenus à enseigner.

Analyse a priori

Une analyse a priori des tâches à proposer aux élèves a pour but d'examiner la manière dont les élèves peuvent utiliser leurs connaissances dans les exercices ainsi que les adaptations à réaliser sur ces connaissances. Elle pourra finalement être confrontée avec ce qu'il se passe en classe.

Les premières questions à se poser face à un exercice concernent les connaissances à mettre en jeu pour le résoudre : quelles sont-elles ? Sont-elles anciennes ou nouvelles ? Ensuite, comment faut-il les appliquer ? Une manière de procéder pour y répondre est de recenser les adaptations à appliquer sur les connaissances afin de les utiliser dans la résolution de l'exercice proposé.

Robert (1998) distingue sept types d'adaptations de connaissances :
 A_1 . Les reconnaissances (partielles) des modalités d'application des connaissances. Elles interviennent lorsque les élèves doivent identifier les hypothèses des propriétés qu'ils connaissent pour pouvoir les utiliser dans leur exercice ou encore lorsqu'ils

doivent prouver un énoncé tel que $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x_n - a| < \epsilon$ pour lequel ils doivent reconnaître comment utiliser la logique pour mener une preuve cohérente.

A₂. L'introduction d'intermédiaires.

Par exemple, si les élèves ont les coordonnées de trois points et qu'il doivent montrer qu'ils sont alignés, il peuvent introduire deux vecteurs définis chacun par deux des points donnés pour conclure que si leur produit vectoriel est nul cela signifie qu'ils sont colinéaires et donc que les trois points sont alignés.

A₃. Les mélanges de plusieurs cadres ou notions, changements de points de vue ou jeux de cadres.

C'est par exemple le cas quand les élèves passent du cadre des systèmes d'équations au cadre des matrices lorsqu'ils décident de résoudre un système à l'aide de la résolution matricielle :

au lieu de rester dans le cadre des systèmes d'équations avec

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y + z = 2 \\ x - y + 3z = -2 \end{cases}, \text{ les élèves lui appliquent des transformations pour}$$

travailler dans le cadre des matrices :
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

A₄. L'introduction d'étapes, l'organisation des calculs ou des raisonnements.

Typiquement, on retrouve cette adaptation dans les preuves algébriques telles que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ pour laquelle les élèves doivent organiser leurs raisonnements : introduire une étape, en montrant que $(A^{-1})^t A^t = I$ et que $A^t (A^{-1})^t = I$, pour ensuite conclure avec l'unicité de l'inverse. L'organisation des calculs est visible dans la preuve de l'étape.

A₅. L'utilisation de questions précédentes.

A₆. L'existence de choix (forcés ou non).

Par exemple dans le choix de la méthode de recherche de l'inverse d'une matrice :
 - avec la méthode de la matrice compagnon qui se base sur le fait qu'appliquer une transformation élémentaire de lignes à une matrice A revient à multiplier à gauche cette matrice par la matrice identité $\mathbb{1}$ dans laquelle on a effectué la même transformation. Dès lors, elle consiste à appliquer simultanément (en deux colonnes) les mêmes transformations à la matrice A et à la matrice identité. Lorsque nous aurons transformé A en la matrice identité dans la colonne de gauche, nous aurons obtenu la matrice inverse dans la colonne de droite.

- avec la formule faisant intervenir déterminant et matrice adjointe :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{Adj}(A)$$

- ...

A₇. Manque de connaissances nouvelles.

Cette adaptation peut être utilisée pour introduire une nouvelle notion auprès des élèves. Une manœuvre classique consiste à proposer un problème dont la solution est apportée par la recherche de racines d'une équation du second degré alors que les élèves ne l'ont jamais fait.

Une fois les adaptations repérées, différents niveaux de mises en fonctionnement des connaissances peuvent être dégagés en fonction des adaptations à effectuer et des indications apportées. Il y a tout d'abord les tâches se résumant à des applications immédiates des connaissances : elles sont simples car aucune adaptation n'est nécessaire et isolées parce qu'une seule connaissance est mise en jeu. Une telle tâche peut par exemple être l'application d'une propriété ou d'une définition : additionner deux matrices données pour illustrer la définition que les élèves viennent de voir. D'autres nécessitent quant à elles des adaptations de connaissances. Le niveau de mise en fonctionnement est alors mobilisable si les élèves disposent d'indications sur les connaissances à utiliser ou disponible s'ils doivent les reconnaître seuls : c'est très souvent le cas dans des exercices de démonstration pour lesquels ils ne disposent que de l'énoncé à prouver.

3.4.2 Analyse des déroulements

Dans le but d'étudier ce qui se passe en classe une fois l'élaboration du scénario terminée, une méthodologie d'analyse des déroulements est mise en place. Par la suite, une comparaison de ce qui a été listé dans l'analyse a priori et ce qui se passe effectivement en classe sera menée.

Ci-dessous sont précisés les éléments de base concernant cette analyse a posteriori : une description des activités des élèves, appelées activités possibles, une caractérisation des aides apportées aux élèves et les éléments à prendre en compte lors d'une correction, ceux-ci étant déterminants dans l'évolution du déroulement.

Les activités possibles

Étant donné que l'intermédiaire choisi entre l'élève et l'apprentissage est l'ensemble des activités de celui-ci, l'analyse des déroulements a pour principal but de déterminer ces activités mathématiques. Or, on ne peut avoir accès qu'à des traces des activités puisqu'elles correspondent, entre autres, aux réactions "mathématiques" des élèves : on doit donc se restreindre à ce qu'on appelle les activités possibles. Il s'agit de celles auxquelles on peut s'attendre compte tenu des connais-

sances à mettre en œuvre.

Ces activités possibles ne sont pas les mêmes chez tous les étudiants : on distingue alors les activités possibles a maxima et a minima. Les premières sont celles des étudiants qui se lancent directement dans la tâche demandée alors que les secondes sont celles d'étudiants ayant besoin d'indications supplémentaires, d'aides au démarrage.

Afin de comparer les activités prévues (par l'analyse a priori) et les activités possibles, nous prenons en compte tout ce qui peut avoir une influence sur les activités mathématiques, notamment les interventions collectives de l'enseignant. Les deux situations concernées par cette analyse sont les phases d'exercices, porteuses de recherches individuelles, et les corrections d'exercices puisqu'elles sollicitent souvent la participation des élèves. Ce sont des moments propices aux activités des élèves, complètement pilotées par l'enseignant et justement par les commentaires qu'il apporte aux élèves tels que les aides.

Les types d'aides

Les aides apportées par l'enseignant, fréquentes en classe de mathématiques, seront également détaillées via le moment où elles sont données et leur nature. Elles peuvent être classées en deux types pouvant avoir une influence différente et complémentaire sur les activités mathématiques : les aides procédurales qui modifient les tâches prévues et les aides constructives qui ajoutent quelque chose entre l'activité et la construction espérée.

Plus précisément, les aides procédurales correspondent à des indications données par l'enseignant avant ou pendant le travail. Celles-ci pouvant mener à un découpage de la tâche en sous-tâches plus simples ou à un choix de méthode très contextualisé : cela change alors les adaptations attendues dans l'analyse a priori et les mises en fonctionnement de leurs connaissances. Autrement dit, elles contribuent à mettre en action les élèves bloqués, en réduisant la difficulté mais en leur laissant du travail. Par exemple, lorsque les élèves doivent déterminer l'équation d'une droite dont ils connaissent deux points, ils doivent calculer la pente et ensuite l'ordonnée à l'origine. Une aide procédurale peut être d'explicitier ces étapes, ce qui permet aux élèves de ne plus organiser leur raisonnement.

Les aides dites constructives ont plutôt un rôle d'intermédiaire explicite apporté par l'enseignant, directement ou sous forme de question, entre un travail

mathématique et l'activité qui peut en résulter. Il s'agit par exemple de rappels ou de bilans qui permettent aux élèves de prendre du recul. Une autre possibilité est de compléter ce qui a été fait, de (faire) expliquer pourquoi cela a été fait, pourquoi ça a fonctionné (ou non), de justifier et discuter les conditions ou choix d'application d'une propriété. Par exemple, toujours avec la recherche d'équation d'une droite, l'enseignant peut demander aux élèves de rappeler l'équation générale d'une droite $d \equiv y = mx + p$ où m est la pente et p l'ordonnée à l'origine.

Les phases de corrections d'exercices

De manière générale, deux choses sont à prendre en considération lors des corrections : le type de correction proposée par l'enseignant (orale, écrite, faite ou fur et à mesure ou à la fin d'un exercice, par l'enseignant, par les élèves, ...) et les propositions de réponses des élèves, pouvant ou non contenir des erreurs.

Les erreurs peuvent contribuer aux apprentissages. En effet, lorsqu'elles correspondent à des représentations fausses ou incomplètes, il est judicieux, voire indispensable, de bien les spécifier auprès de tous. Il est dès lors important de ne rien laisser sous silence au moment de l'exposition de la solution "modèle" afin de cerner les lacunes. Plusieurs éléments peuvent donc intervenir dans une correction : la solution (stricte), ce qui a bien fonctionné, la rédaction,...

La correction peut en quelque sorte améliorer la compréhension des connaissances mises en jeu : elle confirme et complète l'idée de l'élève ayant résolu l'exercice et elle apporte une explication à celui qui était bloqué. Dans tous les cas, la correction doit être générale tout en étant proche de la résolution de l'élève : l'enseignant doit se placer dans la zone proximale de développement des élèves.

3.4.3 Discours de l'enseignant

Comme je l'ai dit précédemment, le discours de l'enseignant peut évidemment influencer les activités des élèves. Ces informations sur le discours permettent d'analyser les conséquences sur le travail des élèves, qu'il s'agisse d'encouragements ou d'éléments mathématiques. Pour cette raison, les fonctions du discours sont utilisées pour qualifier la manière dont l'enseignant intervient et les buts illocutoires traduisent la façon dont l'enseignant gère la répartition des rôles. Leur représentation est facilitée par l'utilisation de tableaux listant fonctions du discours et buts illocutoires, accompagnés du nombre d'occurrences (en %).

Fonctions du discours

Elles sont au nombre de dix et sont réparties en deux catégories. Celles de la première catégorie correspondent aux fonctions cognitives et ont un rapport avec la tâche et le savoir :

- distribution des tâches : indique à l'élève ce qu'il doit faire,
- introduction d'une sous-tâche : fractionne la résolution,
- bilan : réponse ou commentaire,
- justification : donnée ou demande d'une preuve,
- structuration : explicite la séquentialité de l'action,
- évaluation : exprime une appréciation.

La seconde reprend quant à elle les fonctions d'enrôlement, servant à maintenir la communication :

- engagement : interpellation explicite des élèves,
- mobilisation de l'attention : pour maintenir l'engagement,
- encouragement,
- partage de la réponse d'élèves avec les autres.

Buts illocutoires

Comme signalé précédemment, les buts illocutoires caractérisent la manière dont l'enseignant répartit le travail entre lui et les élèves.

Il en existe cinq :

- assertif (ce que l'enseignant dit est présenté comme vrai) : "la somme des angles d'un triangle vaut toujours 180 degrés",
- commissif (confie une mission) : "pouvez-vous me trouver un exemple illustrant cette propriété?",
- déclaratif : "nous allons voir comment fonctionne Google",
- expressif : "non, c'est faux!! Le produit matriciel n'est en général pas commutatif!",
- directif : "faites l'exercice seul".

Pour les repérer, il est utile de regarder le mode des verbes utilisés (par exemple, l'impératif suggère un but directif), la forme des propositions (la forme affirmative se prête plus pour le but assertif alors que la forme interrogative correspond à un but commissif) et l'implication du locuteur et/ou du récepteur (par exemple, un enseignant souhaitant donner un cours magistral usera du but assertif).

3.4.4 Reconstitution des activités des élèves

Toutes les interventions de l'enseignant précédemment citées modifient les activités possibles et contribuent au dernier acte de la méthodologie d'analyse. À partir des informations recueillies, les activités possibles des élèves sont reconstituées et peuvent être comparées aux activités attendues lors de l'analyse des tâches effectuée auparavant.

Tout d'abord, afin de recueillir toute l'information nécessaire, une analyse du déroulement se base généralement sur des séances en classe filmées, éventuellement transcrites, assorties d'entretiens, de notes de cours ou d'autres compléments (sur les notions à enseigner, les programmes, ...). Des facteurs supplémentaires, tels que l'affectif ou le socio-culturel, peuvent altérer les activités et sont considérés comme des paramètres. De plus, les activités d'un élève sont déterminées par l'élève lui-même : des éléments différenciateurs peuvent être pris en compte.

Ensuite, il s'agit de mettre en forme toutes les informations obtenues. Pour ce faire, il faut avant tout tenir compte de la chronologie : fondées sur l'analyse a priori, les tâches sont listées telles qu'elles sont rencontrées par l'élève. Le déroulement d'un exercice est donc découpé en phases et présenté sous la forme d'un tableau à trois colonnes. Pour une phase donnée, diverses informations sont notées : la nature du travail, les interventions collectives de l'enseignant et la description des activités proposées.

La nature du travail concerne la forme (individuel, collectif...) et le type (chercher, écrire, parler, écouter, rédiger, recopier,...) de travail. Il est également utile de préciser les enjeux de la tâche qui peuvent être une recherche, un écrit, un écrit collectif,... Sur une même tâche, la nature du travail des élèves peut pondérer ou modifier les mises en fonctionnement.

3.5 Lien avec la problématique

Le questionnement de départ concernait la conception d'une séance de cours durant laquelle le calcul matriciel serait un outil de résolution. J'ai choisi de m'appuyer sur le problème Google. Or, celui-ci ayant été présenté sous la forme d'un exposé dans un séminaire, je dois en adapter le contenu et en faire un cours accessible pour des élèves du secondaire. Je dois également ménager des phases de théorie et des phases durant lesquelles les élèves travaillent sans l'aide du professeur.

Je dois donc élaborer un scénario en tenant compte des adaptations de connaissances suggérées lors de l'analyse a priori. De cette manière, je peux espérer obtenir une leçon adaptée aux élèves mais présentant un atout intellectuel. Sur base d'un enregistrement, j'analyserai mes interventions et les aides que j'apporterai aux élèves pour ensuite dégager les activités possibles. Celles-ci seront confrontées avec les résultats obtenus par l'analyse a priori effectuée préalablement sur la tâche Google. Tous les détails de l'expérimentation de la leçon se trouvent au chapitre 5 et le bilan qui y est réalisé apportera une réponse à la problématique. Avant cela, la théorie utile à l'analyse du niveau universitaire est développée au chapitre suivant.

Chapitre 4

Difficultés des étudiants à l'université

Lors des recherches sur les difficultés des étudiants en algèbre linéaire, il est apparu que le calcul matriciel ne présentait pas exactement les mêmes caractéristiques que les autres notions de ce cours. En effet, Dorier et al.(1997) ont mis en évidence l'abondance des concepts formalisateurs, unificateurs et généralisateurs (FUG) en algèbre linéaire, comme par exemple les espaces vectoriels, et ont également réalisé une étude montrant un lien entre les difficultés en algèbre linéaire et les lacunes en théorie des ensembles et en logique. Or, après analyse de ces constats, aucune spécification au calcul matriciel n'a été possible. Toutefois, d'autres hypothèses, pouvant être appliquées au sujet de ce travail, ont pu être sélectionnées. Ce chapitre présente donc les deux types de difficultés choisis : les nouvelles pratiques attendues dans l'enseignement universitaire et l'obstacle que peut représenter le formalisme (le langage mathématique) lorsque les élèves arrivent à l'université.

4.1 Nouvelles pratiques attendues

De nombreux travaux se sont penchés sur les difficultés observées chez les étudiants en 1^{ère} année universitaire (Rouchier(2008), Bloch(2006), Robert(1998)). Il apparaît que les exigences des professeurs à l'université semblent différentes de ce qui est demandé dans le secondaire sur plusieurs aspects de l'enseignement et ces nouvelles pratiques apparaissent à deux niveaux : travail personnel et travail mathématique.

Concernant le travail personnel attendu, l'autonomie et l'organisation sont deux nouvelles aptitudes à développer à l'université. En effet, les étudiants doivent "étaler" seuls leur étude : il n'y a généralement qu'un examen final et ils ne

possèdent plus de journal de classe leur indiquant ce qu'ils ont à faire. Ensuite, il leur est conseillé d'entreprendre des exercices supplémentaires par eux-mêmes et enfin, ils travaillent de manière autonome car une nouvelle notion enseignée à l'université n'est en général pas acquise directement, elle doit être retravaillée après le cours pour être bien assimilée.

Au niveau du travail mathématique attendu, il est à noter que la transition du secondaire vers l'université s'accompagne d'une exigence accrue en ce qui a trait à la rigueur mathématique. En effet, les attentes en matière de démonstration et de formalisation s'amplifient et se complexifient. Les étudiants doivent manipuler correctement de nombreuses propriétés et justifier, de manière précise, chacune de leur affirmation. De plus, les mathématiques deviennent de plus en plus abstraites et le langage naturel ne suffit plus pour donner de l'intuition : seules des tournures mathématiques peuvent traduire la matière et la logique devient indispensable. En effet, pour expliquer la définition de la convergence d'une suite ($\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x_n - a| < \epsilon$), il est impossible de ne pas utiliser un formalisme mathématique : "à chaque fois que nous nous fixons une distance (aussi petite soit-elle), nous pouvons trouver un terme à partir duquel tous les autres seront à une distance de a inférieure ou égale à celle que nous avons fixée." est une des formulations les plus simples.

Robert (1998) a repéré plusieurs éléments de complexité dans les nouvelles pratiques mathématiques attendues à l'université. En voici quelques exemples ci-dessous.

1. Des types de problèmes jamais rencontrés

Il s'agit de problèmes qui sont inhabituels pour les étudiants. Par exemple, des problèmes dont le degré de décontextualisation et de généralisation est nettement supérieur à ce que les étudiants ont rencontré jusqu'alors. Dans le cadre des matrices, un exercice de ce type est de montrer que le produit de Lie, défini pour deux matrices carrées A et B de même dimension comme la matrice $A * B = AB - BA$, n'est pas associatif c'est-à-dire écrire la preuve suivante :

soient A, B et C trois matrices carrées de dimension n

$$\begin{aligned} (A * B) * C &= (AB - BA) * C \\ &= (AB - BA)C - C(AB - BA) \\ &= ABC - BAC - CAB + CBA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A * (B * C) &= A * (BC - CB) \\
&= A(BC - CB) - (BC - CB)A \\
&= ABC - ACB - BCA + CBA
\end{aligned}$$

Or, le produit matriciel n'étant pas commutatif, ces deux quantités sont différentes
 \square

Le programme impose que les élèves manipulent des matrices (de dimension inférieure à 3) décrites explicitement et de leur appliquer diverses opérations : par exemple, appliquer le produit de Lie à des matrices données et "numériques". Ici, la propriété se généralise à des matrices de dimension n et la preuve n'est plus vraiment dans le contexte du calcul matriciel puisqu'il s'agit de manipulations algébriques au cours desquelles il faut utiliser les propriétés de l'algèbre matricielle.

2. Pluralité d'arguments à faire intervenir pour un problème donné

Dans une démonstration ou dans un problème, il peut être difficile de distinguer les propriétés à utiliser en guise de justification, d'autant plus quand il y a plusieurs résultats à faire intervenir en même temps.

Voici un exemple concret :

"Montrez que les droites d'équations $D_1 \equiv (x, y) = (0, 2) + \lambda(1, -3)$ et $D_2 \equiv (x, y) = (\frac{2}{3}, 0) + \mu(-3, 9)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont confondues".

Les étudiants doivent fournir les arguments suivants :

un vecteur directeur de D_1 est $(1, -3)$ et un vecteur directeur de D_2 est $(-3, 9)$. Or, les deux droites sont parallèles si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}_0$ tel que $(-3, 9) = k(1, -3)$: il suffit de prendre $k = 3$.

Ces deux droites étant parallèles, elles sont confondues si elles ont un point en commun. Or, $(0, 2) \in D_1$ (avec $\lambda = 0$).

Montrons que $(0, 2) \in D_2$ c'ad $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tel que $(0, 2) = (\frac{2}{3}, 0) + \mu(-3, 9)$:

$$\begin{aligned}
(0, 2) = (\frac{2}{3}, 0) + \mu(-3, 9) &\Leftrightarrow (0, 2) = (\frac{2}{3} - 3\mu, 9\mu) \\
&\Leftrightarrow 0 = \frac{2}{3} - 3\mu \text{ et } 2 = 9\mu
\end{aligned}$$

Dès lors, en prenant $\mu = \frac{2}{9}$, on a bien l'égalité ce qui signifie que $(0, 2) \in D_2$
Ceci prouve que les deux droites sont confondues. \square

3. Arguments à appliquer à répétition

C'est par exemple le cas lors du calcul de déterminant : l'application de plusieurs opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice est nécessaire, en précisant à chaque fois la propriété de variation du déterminant qui s'y rapporte.

4. Sélection d'information

C'est le cas lorsque le théorème à appliquer n'est à utiliser que partiellement dans la résolution d'un problème ou en démonstration. Par exemple, déduire de la valeur du produit vectoriel $AB \times AC$ que les points A , B et C ne sont pas alignés : la valeur du produit vectoriel importe peu, on sélectionne le fait qu'elle soit non nulle.

5. Changements (à la charge de l'élève-étudiant) de cadre, de registre de représentations, de point de vue, d'angle d'attaque

Il s'agit d'une adaptation des connaissances décrite dans le chapitre précédent. Dans le cas d'une démonstration, cette action correspond à traduire l'énoncé donné en une nouvelle expression qui, une fois démontrée, prouve l'énoncé initial. Ça sera par exemple le cas lorsqu'il faut déterminer la position relative de trois plans dans l'espace. Les étudiants doivent passer du cadre de la géométrie vectorielle au cadre des systèmes d'équations linéaires et pourquoi pas à celui des matrices pour la résolution.

6. Quantifications implicites

Il n'est pas toujours nécessaire d'utiliser les quantificateurs pour exploiter une définition. Parfois, l'utilisation du langage courant pour exprimer une quantification (toutes les matrices ... ou il existe une matrice pour laquelle...) ne permet pas à l'étudiant de bien décoder cette quantification et l'amène à interpréter certains énoncés liés de façon erronée. On sait par exemple que le produit matriciel est non commutatif. Certains étudiants interpréteront cet énoncé en disant que pour toute paire de matrices A et B , le produit AB n'est jamais égal à BA .

4.2 L'obstacle du formalisme

Le formalisme correspond à l'ensemble d'expressions spécifiques, rencontrées lorsqu'on fait des mathématiques. Il s'agit en fait de toutes les formulations mathématiques possibles : des mots, des symboles, des tableaux, ... En effet, on peut aussi bien être formel avec des mots provenant du langage naturel qu'avec des symboles. Par exemple, en topologie, on peut dire qu'un ensemble est ouvert s'il est un voisinage de chacun de ses points : tous ces mots proviennent du langage quotidien mais cette explication est formelle.

Les difficultés des étudiants en algèbre linéaire révèlent ce que Dorier et al. (1997) appellent l'*obstacle du formalisme*. Comme signalé dans l'introduction, cette difficulté concerne les étudiants qui travaillent sur la forme des expressions, sans considérer à quoi celles-ci correspondent en réalité. Une des conséquences est la

confusion entre différentes catégories d'objets mathématiques. Par exemple, les ensembles sont traités comme des éléments d'ensembles ($A \in B$). De plus, ils ont fait un lien entre le manque de connaissances en logique et en théorie des ensembles qui provoquent des formalisations difficiles pour les étudiants.

L'obstacle du formalisme fait notamment produire aux étudiants un discours qui a les apparences du discours utilisé par l'enseignant ou le manuel mais qui n'a en réalité pas de sens. Ils alignent des formules et des symboles sans raisonnement ou vont souvent développer des automatismes. Un de ces automatismes est de construire une matrice à chaque fois qu'ils le peuvent, quelle que soit la question qui leur est demandée. Corriveau (2007) l'a illustré dans son mémoire :

Ligne 1	$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$	
Ligne 2	$(A^t)^{-1}(A^t) = (A^{-1})^t(A^t)$	
Ligne 3	$= (A^{-1})^t(A^t)$	
Ligne 4	$= (A^{-1}A)^t$	
Ligne 5	$= (I)^t$	
Ligne 6	$= I$	

L'étudiant utilise un automatisme fréquemment relevé : partir de la thèse, lui appliquer des opérations et/ou des propriétés pour arriver à quelque chose de "vrai". Ici, il multiplie chaque côté de l'égalité de la thèse par (A^t) . Il manipule ensuite le côté droit jusqu'à obtenir la matrice identité, et donc l'égalité $(A^t)^{-1}(A^t) = I$. Cette dernière serait justifiée par ce qui est entouré d'un nuage, et qui viendrait de la définition de l'inverse. Pour ce qui est du détail des manipulations, nous remarquons des problèmes de sens. En effet, l'étudiant transpose le produit des deux matrices sans les commuter (on peut penser que l'étudiant traite "t" comme un exposant), de la Ligne 2 à la Ligne 3 il sort le "t" des parenthèses comme pour le mettre au même niveau que le "t" qui affecte A^{-1} . Il y a ici perte du sens accordé aux manipulations et aux symboles.

Pour beaucoup d'étudiants, le langage mathématique formel n'a pas assez de sens. Sa pauvreté sémantique le rend difficile à comprendre. De plus, Froger (2003) a mis en évidence une dualité entre simplicité de l'écriture et complexité de compréhension : bien qu'épuré, le langage mathématique peut caractériser des notions très complexes et donc être difficile à comprendre alors que le langage courant présente une structure complexe qui le rend plus accessible. Dès lors, le formalisme mathématique peut donner l'impression aux étudiants qu'il se suffit à

lui-même alors qu'en réalité, "l'écriture formelle n'est pas en elle-même porteuse de la signification des lois qu'elle énonce et des objets qu'elle met en jeu" (Bloch et al., 2006). Inversement, les étudiants peuvent utiliser à tort le langage courant pour exprimer des concepts mathématiques, ce qui peut produire des explications incompréhensibles.

De plus, les étudiants ont tendance à oublier les objets qu'ils manipulent lorsqu'ils utilisent les symboles mathématiques et particulièrement lors de la rédaction de démonstrations pour lesquelles ils agencent élégamment une suite de symboles sans réfléchir aux objets qu'ils représentent. Ils peuvent par exemple comprendre un théorème ou une propriété mais ne pas l'appliquer correctement car ils ne manipulent que des formules sans raisonner sur les symboles qu'elles contiennent : ils peuvent ainsi égaler $A^t B^t$ à $(AB)^t$ en appliquant à tort la règle des exposants sur le symbole de la transposée.

Il existe alors un paradoxe lors de l'introduction d'une nouvelle algèbre (par exemple l'algèbre matricielle) communément appelé le "paradoxe de l'apprentissage de l'algèbre". Selon Dorier (1997), "il faut pouvoir travailler sur des équations en oubliant momentanément ce qu'elles représentent mais en sachant y revenir quand besoin est [...]". Corriveau (2007) a poussé cette réflexion plus loin en relevant un véritable paradoxe, celui d'accepter de confier, à toute nouvelle algèbre, une partie du raisonnement au profit de calculs plus automatisés et d'une algorithmisation des démarches. Cette pratique doit en principe permettre une plus grande efficacité du raisonnement mais entraîne malheureusement des pertes de contrôle et de sens. Par exemple, lors de la résolution d'un problème par des calculs algébriques, les étudiants peuvent obtenir $x = 7,54$ comme solution d'une équation à une inconnue. Si x représente une quantité entière, un réajustement est alors nécessaire pour conclure que la solution est 7 ou 8, en fonction de ce qui est cherché. Mais l'élève qui s'est contenté de calculer en oubliant complètement sa démarche pourrait ne pas faire ce réajustement, et donner 7,54 comme réponse!

Ensuite, la mauvaise utilisation du symbolisme, ou plus particulièrement le mauvais choix des registres de représentation, est source de complications et donc d'erreurs. Pour rappel, un registre caractérise l'écriture utilisée pour représenter un objet (cf chapitre 3). Une matrice peut être représentée avec un tableau de nombres ou de variables, une lettre majuscule ou une lettre indicée entre parenthèses. Du coup, les étudiants doivent choisir un registre de représentation selon leurs besoins. Par exemple, pour calculer la somme des éléments de la diagonale d'une matrice $S \in \mathbb{R}^{p \times p}$ définie par $S = MN$ où $M_{ij} = j - i$ et $N_{ij} = i + j$ ($M, N \in \mathbb{R}^{p \times p}$), les

étudiants doivent travailler avec $S_{ii} = \sum_{k=1}^p M_{ik}N_{ki}$ et non écrire les matrices M et N et faire leur produit. Il doivent donc utiliser la définition du produit matriciel et ne pas le voir comme un calcul qui doit produire une réponse. La section suivante précise les difficultés dues aux registres.

4.3 Les registres de représentation

Le programme du secondaire permet une évolution lente depuis le "calcul traditionnel" vers l'algèbre plus symbolique. Tout d'abord, les élèves utilisent des expressions arithmétiques (avec des lettres) et traduisent des problèmes faisant intervenir une inconnue x : il y a donc une progression symbolique. Le niveau d'abstraction augmente ainsi peu à peu, sans trop de perturbations. Cependant, le niveau d'abstraction accroît subitement lorsque les élèves commencent à manipuler et calculer avec des vecteurs. De plus, on leur présente les nouveaux objets (vecteurs, matrices) et les symboles associés, croyant que c'est en les manipulant qu'ils s'approprient ce qu'ils représentent. Cependant, si les étudiants n'ont pas une connaissance convenable de ce qui est symbolisé, les manipulations restent alors vides de sens. Les travaux de Duval (1993) semblent suggérer qu'un travail de conversion entre les différents registres permet de casser ce cercle vicieux. Selon lui, chaque registre de représentation a ses propres règles et caractéristiques et pour faire une conversion¹ entre les registres, l'étudiant doit avoir compris la différence entre le sens qu'il attribue à l'objet et les références à cet objet via ses représentations symboliques : la manière d'opérer sur ces symboles diffère d'un registre à l'autre mais ils représentent le même objet mathématique. Duval affirme également que les élèves doivent faire fonctionner différents registres de représentations pour comprendre ce qu'on manipule.

De plus, les registres comportent parfois du vocabulaire et des symboles communs à plusieurs cadres. Du coup, lorsqu'une nouvelle notion présente des symboles identiques aux anciennes, les étudiants ont tendance à les confondre. Or, la plupart des symboles attribués aux objets nouvellement introduits ont des significations différentes de ceux des autres cadres plus familiers. Finalement, les anciennes connaissances des élèves peuvent interférer avec la nouvelle matière. Par exemple, la commutativité de la multiplication du cadre algébrique classique sera utilisée, à tort, dans un cadre d'algèbre matricielle.

1. Une conversion désigne, selon Duval, "la transformation d'une représentation en représentation d'un autre registre en conservant la totalité ou une partie seulement du contenu de la représentation initiale".

Le problème inverse peut également intervenir en algèbre : les étudiants, travaillant dans le nouveau cadre, sont incapables d'en sortir pour aller vers des cadres qu'ils maîtrisent mieux. Les difficultés sont alors d'une autre nature : "l'absence de référence à un autre cadre limite les changements de cadres, parfois difficiles à gérer, mais du même coup, les moyens de contrôle ainsi que les possibilités de prise de sens sont d'autant plus restreints. Ainsi, si la tâche est de nature conceptuelle et s'il n'y a pas d'algorithme ou de méthode classique pour s'en sortir, les dérapages et les pertes de sens sont fréquents, donnant lieu à des propos apparemment incohérents ou absurdes. (Dorier, 1997)

4.4 Lien avec la problématique

Le questionnement général concernait la transition entre le secondaire et l'université dans le cadre du calcul matriciel. Celui-ci s'est ensuite spécifié au formalisme à la lecture des documents écrits par Dorier et al.(1997) pour arriver à ces deux questions :

- quelle forme prend l'obstacle du formalisme dans le cas du calcul matriciel ?
- peut-on le mettre en lien avec les erreurs observées chez les étudiants ?

Ce chapitre a donc pris le thème du formalisme comme base de recherche, ce qui a permis de dégager les difficultés possibles des étudiants dues au manque de sens qu'ils donnent au formalisme. Dès lors, elles nous serviront de base de recherche pour l'expérimentation du chapitre 6, supposant répondre à la problématique. En effet, je tenterai de les adapter voire de les retrouver, dans le contexte du calcul matriciel.

Chapitre 5

Les matrices dans un domaine appliqué : Google

Ce chapitre reprend toute l'information qui concerne la tâche Google, conçue en lien avec la problématique : cette tâche a pour but de présenter les matrices comme un outil de résolution. Avant de faire intervenir la théorie didactique expliquée au chapitre 3, je donne ici des explications de base sur le fonctionnement de Google qui seront utiles pour comprendre les réponses attendues des élèves. Ensuite, je préciserai le scénario prévu ainsi que les analyses a priori et du déroulement qui s'y rapportent.

5.1 Explications de base

Ils s'agit ici d'une brève explication théorique sur le fonctionnement de Google. Pour la réaliser, je me suis inspirée de Rigo(2008) et du livre *Google's PageRank and Beyond : The Science of Search Engine Rankings*.

5.1.1 Classement des pages web

Un moteur de recherche joue le rôle d'intermédiaire entre un surfeur et internet. Sa mission est de répertorier toutes les pages web et requiert donc leur parcours incessant. Cependant, le nœud du problème ne réside pas dans ce parcours mais concerne le choix des sites significatifs. En effet, le but n'est pas de présenter les différents sites de manière aléatoire mais bien de les classer par ordre d'importance ! Ce travail est effectué par des machines, appelées web-crawler, appliquant des algorithmes conçus pour présenter les pages les plus intéressantes en priorité. En 1998, Larry Page et Sergey Brin, créateurs de Google, ont développé un algo-

rithme puissant prenant en charge, de manière efficace, les quelques dix milliards de sites web.

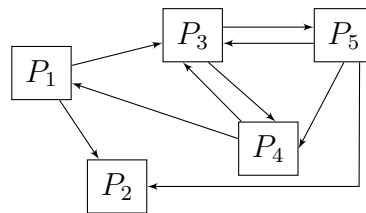
La fondation du modèle de Page et Brin consiste à attribuer un score, appelé PageRank, à chaque page. Ce score traduira l'importance d'une page : plus il est élevé, plus la page sera considérée comme intéressante. L'une des tâches de Google réside donc dans le calcul des PageRanks et celui-ci repose sur deux règles logiques et naturelles, notées R_1 et R_2 :

- R_1 : des pages référencées par des pages importantes le sont également,
- R_2 : une référence a d'autant moins de crédit si elle provient d'une page référençant de nombreux liens.

Autrement dit, plus une page est référencée, plus elle doit faire autorité dans le domaine en question. Cependant, il faut accorder moins de poids aux sites peu spécialisés. Plus concrètement, si nous demandons à un ensemble de personnes de citer de grands scientifiques :

- nous accorderons plus de crédit à un prix Nobel plutôt qu'à un individu quelconque (R_1),
- une personne ne citant qu'Einstein considère ce dernier comme le plus grand scientifique alors que citer Einstein parmi 500 autres scientifiques signifie qu'il est l'un des 500 meilleurs (R_2).

Par exemple, considérons cinq pages internet dont le graphe des liens est représenté ci-dessous (une flèche de p_i vers p_j signifiant " p_i possède une référence vers p_j ") et appelons les scores associés à ces pages s_i .



Pour tenir compte de R_1 , nous pouvons supposer que le score d'une page vaut la somme des scores des pages qui la référencent. Par conséquent, des pages référencées par de hauts scores obtiendront elles aussi des scores élevés. On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} s_1 = s_4 \\ s_2 = s_1 + s_5 \\ s_3 = s_1 + s_4 + s_5 \\ s_4 = s_3 + s_5 \\ s_5 = s_3 \end{cases}$$

Afin de considérer R_2 , il suffit de diviser chaque score par le nombre total de liens que possède la page. De cette manière, plus une page contiendra de liens, moins elle aura de poids. On a alors :

$$\begin{cases} s_1 = \frac{s_4}{2} \\ s_2 = \frac{s_1}{2} + \frac{s_5}{3} \\ s_3 = \frac{s_1}{2} + \frac{s_4}{2} + \frac{s_5}{3} \\ s_4 = \frac{s_3}{2} + \frac{s_5}{3} \\ s_5 = \frac{s_3}{2} \end{cases}$$

On aperçoit dès à présent le rôle des mathématiques dans le fonctionnement de Google : la résolution de ce système fournira les PageRanks et permettra un classement de qualité des différentes pages que recense internet.

5.1.2 Résolution matricielle

Nous allons maintenant basculer vers le calcul matriciel en considérant la représentation matricielle du système établi ci-dessus :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix}}_s = \underbrace{\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix}}_s$$

Cette façon d'appréhender le système permet une traduction directe du graphe des liens. Il est en effet aisé, à la lecture de la matrice B , de retrouver l'information provenant du graphe. Par exemple, le " $\frac{1}{2}$ " situé à l'intersection de la première ligne et de la quatrième colonne nous informe qu'il existe un lien de la page 4 vers la page 1 et que la page 4 possède au total 2 liens. De même, la colonne 2, remplie de "0", nous indique que la page 2 ne référence aucune autre page.

Dès lors, pour attribuer les scores satisfaisant les deux règles données, il suffit de trouver un vecteur s tel que $Bs = s$. Dans notre exemple, il s'agit de résoudre un système de 5 équations à 5 inconnues mais dans une situation réelle, il s'agit

de centaines de millions d'équations avec autant d'inconnues !

5.1.3 Perturbation du modèle

Tout d'abord, si un vecteur s satisfait $Bs = s$ alors tout multiple de s la satisfait également. En effet, pour tout réel a , $B(as) = a(Bs) = as$. Dès lors, une condition de normalisation peut être ajoutée : imposons que la somme des éléments de s soit égale à 1. Il suffit de prendre $\frac{1}{\sum_{i=1}^n s_i} s$ comme solution.

Ensuite, l'existence d'une solution non nulle n'est pas garantie et dans le cas où nous en trouvons une, elle n'est pas nécessairement unique. D'un point de vue purement mathématique, ces situations ne présentent aucun problème. Par contre, dans le cadre de l'attribution des scores, ces cas sont critiques : les valeurs des PageRanks sont vides de sens !

Afin d'éviter ces situations ambiguës, Page et Brin ont décidé de modifier la matrice B en lui appliquant deux opérations successives :

- remplacer les 0 de la colonne nulle par $\frac{1}{n}$ où n est la dimension de la matrice,
- multiplier chaque élément par $\alpha = 0,85$ et ajouter ensuite $\frac{1-\alpha}{n}$.

Ces manipulations génèrent une nouvelle matrice G et perturbent certes le modèle initial. Cependant, les impacts sur la matrices B sont insignifiants en comparaison avec ceux apportés sur la résolution du système : ces modifications permettent d'assurer l'existence et l'unicité de la solution (normalisée), ainsi que son calcul effectif.

Penchons-nous à présent sur le choix de la valeur de α (0,85). Celui-ci n'est évidemment pas arbitraire. Nous pouvons observer que plus la valeur d' α est proche de 1, plus on est proche du modèle initial. Cependant, choisir α trop proche de 1 peut endommager la rapidité et la stabilité des calculs.

5.1.4 Existence et unicité de la solution

La matrice G est :

- primitive. Pour rappel, $A \in Mn(\mathbb{R})$ est primitive si elle est positive irréductible et a une unique valeur propre de module maximal,
- stochastique, c'est-à-dire que la somme des éléments de chaque colonne vaut 1.

Dès lors, le théorème de Perron-Frobenius¹ nous apporte une solution : si une matrice réelle A a tous ses coefficients strictement positifs alors son rayon spectral est une valeur propre dont l'espace propre associé est de dimension 1. Par ailleurs elle admet un vecteur propre pour cette valeur propre dont tous les coefficients sont strictement positifs.

Autrement dit, le fait que G soit primitive entraîne qu'elle possède toujours un vecteur s à composantes réelles et (strictement) positives tel que $Gs = ts$ ($t > 0$), unique à un multiple près. De plus, G stochastique implique que t vaut 1. ("si G est une matrice positive telle que la somme des termes de chaque ligne (ou colonne) vaut $\alpha \in \mathbb{R}$ alors α est valeur propre de G et $\rho(G)=\alpha$ ").

Donc, $Gs = s$.

5.1.5 Calcul effectif des scores

Le théorème de Perron-Frobenius possède un autre avantage. Il stipule que la suite des puissances successives de la matrice G converge vers une matrice limite dont toutes les colonnes sont égales à s .

De plus, le calcul numérique des premières puissances de G montre qu'avec une précision de 5 chiffres, il n'y a aucune différence entre G^{20} et G^{200} . Dès lors, 200 produits matriciels suffisent pour obtenir un classement satisfaisant. Il ne faut cependant pas oublier que la matrice G est de dimension 10^{10} et que des super-ordinateurs recalculent, 24 heures sur 24, ces puissances d'une matrice remise constamment à jour.

5.2 Statut de la nouvelle notion

Pour déterminer le statut d'une notion, je m'appuie sur la distance qui existe entre les anciennes connaissances des élèves et les nouvelles connaissances à introduire. Ici, il est prévu de proposer cette tâche à des élèves de 6^e année ayant déjà étudié le calcul matriciel, la résolution de systèmes d'équations et le calcul algébrique alors que la nouveauté concerne les graphes orientés, modélisés avec des matrices.

Dès lors, la notion de graphe est le lien unificateur entre les matrices, les systèmes d'équations et le calcul algébrique. De plus, il amène un nouveau formalisme par sa représentation avec les nœuds (correspondant aux pages internet)

1. Pour la preuve, voir HORN R.A., JOHNSON C.R., *Matrix analysis*

et les flèches. Les graphes orientés correspondent donc à une notion RAP dont le problème de départ est le fonctionnement de Google.

5.3 Scénario

Dans le cadre théorique, le scénario est présenté comme l'ensemble des constituants d'un cours : théorie, exercices, gestion et évaluation. Ici, il ne comporte que le cours et la gestion a priori. En fait, il est prévu que la tâche ne soit pas donnée dans des conditions habituelles d'enseignement : les exercices font partie intégrante de la théorie et il n'y a pas d'évaluation finale. Cette symbiose résulte du souhait d'obtenir une leçon interactive alors que l'absence d'une évaluation est une conséquence de mon statut de "non-enseignante" qui m'empêche de monopoliser plusieurs heures de cours pour une matière hors programme.

Je présente ci-dessous la leçon telle que j'envisage de la donner aux élèves en traitant cours et gestion simultanément : la gestion a priori est intercalée, en italique, dans les notes distribuées aux élèves. J'y glisserai quelques réponses afin d'apporter un maximum de clarté mais pour plus d'informations, le lecteur est invité à se rapporter aux *explications de base* précédemment données.

De manière générale, il est prévu que l'enseignant guide les élèves sans que cela devienne un cours magistral. Le but n'est pas de donner l'information aux élèves mais bien de les faire réfléchir et d'interagir avec eux durant toute la séance. Dès lors, l'enseignant leur laissera du temps pour réaliser les exercices proposés en les corrigeant collectivement au fur et à mesure. Cette séance doit durer, environ, deux fois cinquante minutes.

L'élaboration de ces notes a exigé plusieurs étapes de travail. Je suis tout d'abord partie de textes trop compliqués pour des élèves du secondaire et j'en ai dégagé une vision simplifiée, présentée dans la section *explications de base*. À partir de ce nouveau document, j'ai dû inventer divers moyens pour donner de l'intuition aux élèves afin qu'ils puissent trouver seuls (du moins presque seuls) les grandes idées de Google. Enfin, il était important de laisser une grande part de réflexion et d'autonomie aux élèves afin que cette leçon leur permette de faire évoluer leurs pratiques mathématiques. Des analyses a priori ont donc été nécessaires afin de mesurer le travail que les élèves devront accomplir.

Comment fonctionne Google ?

Introduction

Un moteur de recherche joue le rôle d'intermédiaire entre un surfeur et internet. Sa mission est de répertorier toutes les pages web et requiert donc leur parcours incessant. Cependant, le noeud du problème ne réside pas dans ce parcours mais concerne le choix des sites significatifs. En effet, le but n'est pas de présenter les différents sites de manière aléatoire mais bien de les classer par ordre d'importance! Ce travail est effectué par des machines, appelées web-crawler, appliquant des algorithmes conçus pour présenter les pages les plus intéressantes en priorité. Larry Page et Sergey Brin, créateurs de Google, ont développé un algorithme puissant prenant en charge, de manière efficace, les quelques dix milliards de sites web.

L'idée de base

Le but de la première tâche est de déterminer l'idée sur laquelle repose la confection de l'algorithme de Page et Brin : l'association de scores aux différentes pages. Afin d'orienter les élèves qui sont, à ce stade, complètement ignorants, une question introductive leur est posée :

À l'école, comment repère-t-on la meilleure copie parmi les productions de tous les élèves ?

.....

.....

Les élèves auront un peu de temps pour écrire leur réponse personnelle sur la première ligne pointillée. La réponse attendue "celle ayant obtenu la quote la plus élevée", sera formulée collectivement avant toute réflexion autour de la question principale :

Compte tenu de cette remarque, quelle pourrait être l'idée de Page et Brin pour déterminer le classement des pages internet ?

.....

À nouveau, les élèves réfléchiront seuls et auront la première ligne comme brouillon. La correction sera ensuite orale et collective.

Les règles à suivre

Les règles régissant le tri des pages sont introduites à l'aide de deux petites questions donnant l'impression de n'avoir aucun lien avec Google. Elles servent en fait à donner de l'intuition aux élèves sans leur apporter directement l'information. Les élèves disposeront de quelques minutes pour y répondre consécutivement.

- Si tu devais créer un site, de quel(s) chanteur(s)/groupe(s) parlerais-tu?

.....

- Tu recherches des informations sur le groupe Muse. À quel site accordes-tu le plus de crédit? Coche celui de ton choix.

Le site officiel de Muse,

Le skyblog de Robertine, une adolescente de 13 ans que tu ne connais pas.

L'enseignant fera remarquer, lors de la mise en commun des différentes réponses des élèves, que certains n'ont qu'un chanteur alors que d'autres en ont listé plusieurs. Il essaiera d'amener les élèves sur l'intuition suivante : une personne ne citant qu'un chanteur peut être considérée comme plus spécialisée. La seconde remarque, avec le skyblog de Robertine, est plus évidente : certains sites internet sont plus fiables que d'autres. Les élèves devront ensuite déterminer les deux règles en groupe et la correction, donnée finalement par l'enseignant, sera écrite dans le cadre ci-dessous.

Conclusions

.....

.....

.....

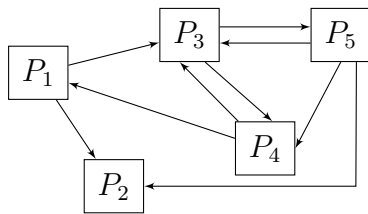
.....

.....

.....

.....

Application des règles



Considérons cinq pages internet dont le graphe des liens est représenté ci-contre. Une flèche de p_i vers p_j signifiant " p_i possède un lien vers p_j ".

Appelons les scores associés à ces pages s_i .

L'enseignant devra mettre les élèves sur la voie sans leur donner trop d'indications. Une façon de procéder est de répéter de différentes manières les "liens de proportionnalité" qu'il doit exister entre les scores.

- Pour tenir compte de R_1 ,
-
-
-
-
-
- $$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \dots\dots\dots \\ s_2 = \dots\dots\dots \\ s_3 = \dots\dots\dots \\ s_4 = \dots\dots\dots \\ s_5 = \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

- Afin de considérer R_2 ,

$$\left. \begin{array}{l}
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 s_1 = \dots\dots\dots \\
 s_2 = \dots\dots\dots \\
 s_3 = \dots\dots\dots \\
 s_4 = \dots\dots\dots \\
 s_5 = \dots\dots\dots
 \end{array}$$

On aperçoit dès à présent le rôle des mathématiques dans le fonctionnement de Google : une solution de ce système fournira les PageRanks et permettra un classement de qualité des différentes pages que recense internet.

Modélisation du problème

Les élèves doivent réécrire le système à l'aide de matrices. Pour cela, l'enseignant les guidera en leur demandant, par exemple, de citer les moyens de résolution de systèmes qu'ils connaissent jusqu'à ce qu'ils citent les matrices. De plus, les élèves devront expliquer pourquoi la matrice des coefficients traduit parfaitement le graphe orienté donné.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Perturbation du modèle

- Nous allons imposer que la somme des éléments de s soit égale à 1.

Cette condition est tout à fait réalisable car si un vecteur s satisfait $Bs = s$ alors tout multiple de s la satisfait également.

L'enseignant guidera les élèves selon leurs besoins mais a priori, ils sont capables de faire cette petite démonstration seuls.

En effet,

.....

.....

.....

Dès lors,

.....

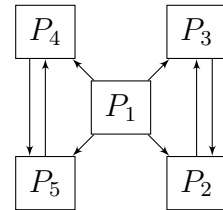
.....

Les élèves doivent maintenant répondre, individuellement, aux deux questions suivantes :

1) Résous le système précédemment obtenu.

2) Trouve le système associé à ce graphe des liens et vérifie si les valeurs suivantes sont solutions de ce système :

- $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ et $s_4 = s_5 = \frac{1}{2}$
- $s_1 = s_2 = 0, s_3 = s_5 = 1$ et $s_4 = \frac{1}{2}$
- $s_1 = s_4 = s_5 = 0$ et $s_2 = s_3 = \frac{1}{2}$



Pour ce faire, l'enseignant leur précisera qu'ils doivent utiliser les méthodes de combinaison et de substitution. Lorsqu'ils auront terminé, la correction suivra. Ensuite, l'enseignant leur demandera en quoi ces situations posent problème dans le cadre du calcul des scores. Ils noteront les constatations formulées collectivement dans le cadre ci-dessous.

Constatations

Dans le but d'éviter ces situations, Page et Brin ont décidé de modifier la matrice B (la matrice des coefficients dans la modélisation matricielle du système) en lui appliquant deux opérations successives.

L'enseignant dirigera la réflexion en groupe en notant les réponses proposées oralement par les élèves.

- Remplacer les 0 de la colonne nulle par $\frac{1}{n}$ où n est la dimension de la matrice.

On obtient la matrice suivante :

$$C = (\dots)$$

- Multiplier chaque élément de C par $\alpha = 0,85$ et leur ajouter ensuite $\frac{1 - \alpha}{n}$.

On obtient la matrice suivante :

$$G = (\dots)$$

Pourquoi prendre $\alpha=0,85$?

Si $\alpha=1$ alors Dès lors, plus la valeur de α est proche de 1, plus on est proche Cependant, choisir α trop proche de 1 peut endommager la rapidité et la stabilité des calculs.

Existence et unicité de la solution

Nous allons prouver qu'il existe toujours une et une seule solution de $Gs = s$. Les deux théorèmes suivants nous seront utiles :

Théorème 1 (Perron-Frobenius)

Si G est une matrice strictement positive alors il existe un unique réel a et un vecteur à composantes strictement positives s (unique à multiples près) tels que $Gs = as$

Théorème 2

Si G est une matrice positive telle que la somme des termes de chaque ligne (ou colonne) vaut $\beta \in \mathbb{R}$ alors il existe un vecteur s tel que $Gs = \beta s$

Il s'agit cette fois d'un exercice de démonstration dont ils n'ont pas l'habitude. Ils auront certainement besoin d'être guidés par l'enseignant sans pour autant qu'il fasse lui-même la preuve.

Démonstration

.....
.....
.....
.....
.....

Calcul des scores

Observe ces puissances de la matrice G . Que remarques-tu ?

$$G^5 = \begin{pmatrix} 0.14721 & 0.13301 & 0.12861 & 0.13367 & 0.13989 \\ 0.18196 & 0.18931 & 0.19412 & 0.18584 & 0.18545 \\ 0.26597 & 0.26067 & 0.26295 & 0.25602 & 0.26253 \\ 0.16641 & 0.17481 & 0.17349 & 0.17906 & 0.17107 \\ 0.23844 & 0.2422 & 0.24084 & 0.2454 & 0.24107 \end{pmatrix}$$

$$G^{20} = \begin{pmatrix} 0.13556 & 0.13556 & 0.13556 & 0.13556 & 0.13556 \\ 0.18804 & 0.18804 & 0.18804 & 0.18804 & 0.18804 \\ 0.26163 & 0.26163 & 0.26163 & 0.26163 & 0.26163 \\ 0.17316 & 0.17316 & 0.17316 & 0.17316 & 0.17316 \\ 0.24162 & 0.24162 & 0.24162 & 0.24162 & 0.24162 \end{pmatrix}$$

$$G^{200} = \begin{pmatrix} 0.13556 & 0.13556 & 0.13556 & 0.13556 & 0.13556 \\ 0.18804 & 0.18804 & 0.18804 & 0.18804 & 0.18804 \\ 0.26163 & 0.26163 & 0.26163 & 0.26163 & 0.26163 \\ 0.17316 & 0.17316 & 0.17316 & 0.17316 & 0.17316 \\ 0.24162 & 0.24162 & 0.24162 & 0.24162 & 0.24162 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une simple observation dont le constat est évident et pour laquelle une correction orale et collective est suffisante. Toutefois, il faudra peut-être aider les élèves pour qu'ils parlent en termes de suite.

.....

.....

Dès lors, il est inutile de calculer toutes les puissances de G pour trouver s . Après calcul numérique, il apparaît qu'avec une précision de 5 chiffres, il n'y a aucune différence entre G^{20} et G^{200} .

En conclusion, 200 produits matriciels suffisent pour obtenir un classement satisfaisant. Il ne faut cependant pas oublier que la matrice G est de dimension 10^{10} et que des super-ordinateurs recalculent, 24 heures sur 24, ces puissances d'une matrice remise constamment à jour !

5.4 Analyse de la tâche

Je reprends ici les différentes étapes de la tâche Google en décrivant le travail mathématique à réaliser pour chaque sous-tâche. Pour ce faire, j'utilise les outils de Robert (1998) présentés au chapitre 3, section 3.4 .

L'idée de base

Il s'agit d'une question qui requiert le bon sens des élèves. Elle ne nécessite pas de connaissances mathématiques à strictement parler mais elle fait appel à une application directe de la question introductive, préalablement corrigée.

Les règles à suivre

À la suite de la discussion autour des questions introductives décrite dans la gestion a priori, les élèves doivent déterminer les deux règles régissant l'attribution des scores, sachant qu'elles se basent sur les idées détaillées auparavant. Ils doivent donc utiliser les deux petites questions précédentes en les traduisant en termes de pages et de scores. Là encore il ne s'agit pas d'une véritable activité mathématique

mais d'une généralisation des exemples introductifs et intuitifs.

Application des règles

Peu de connaissances sont à utiliser ici et aucune d'entre elles n'est nouvelle : les élèves ont besoin des deux règles sur lesquelles repose le choix des scores (données en français dans la sous-tâche précédente), de la comparaison de fractions et de penser que si $x = a + b$ alors quand a ou b augmentent, x augmente également. Cela nécessite surtout une bonne intuition pour parvenir à traduire ces règles dans le langage mathématique. Dans un premier temps, les élèves doivent appliquer les connaissances algébriques citées ci-dessus au "cadre du calcul des scores". Ensuite, un passage du langage naturel au langage mathématique symbolique est nécessaire en s'appuyant sur le graphe orienté donné. Ils doivent dès lors être capables de le lire grâce au mode de lecture indiqué dans l'énoncé et pouvoir passer du registre graphique au registre algébrique.

Modélisation du problème

Les connaissances à mettre en fonctionnement correspondent aux méthodes de résolution des systèmes et en particulier la résolution matricielle avec les opérations matricielles qui s'y rapportent. Les adaptations à réaliser sur ces connaissances sont dès lors l'existence de choix de méthodes, parmi les différents moyens de résolutions des systèmes d'équations qu'ils connaissent, ainsi que le mélange de plusieurs cadres et notions puisqu'ils doivent passer d'un système écrit en termes d'équations à une écriture sous forme matricielle. Ils devront ensuite confronter la matrice des coefficients avec le graphe des liens afin de comprendre ce que représentent les éléments contenus dans la matrice des coefficients.

Perturbation du modèle

Partie 1

La tâche consiste en une démonstration : prouver que si un vecteur s satisfait l'égalité $Bs = s$ alors tout multiple de s la satisfait également. Afin de décrire au mieux ce que les élèves doivent accomplir, je vais écrire la résolution attendue par l'enseignant et analyser les différentes étapes :

Soit a un réel,

$$\begin{aligned}
B.(a.s) &= B.a.s && \text{par associativité du produit} \\
&= a.B.s && \text{par commutativité du produit d'une matrice par un réel} \\
&= a.s \text{ car } B.s = s && \text{par hypothèse}
\end{aligned}$$

Il s'agit d'un travail algébrique qui nécessite des connaissances sur le calcul matriciel telles que l'associativité du produit et la commutativité du produit d'une matrice par un scalaire. Afin d'identifier et utiliser ces propriétés, les élèves doivent tout d'abord introduire un intermédiaire sous la forme d'un nombre réel permettant de traduire l'expression "multiple de s ". Enfin, il devront organiser les calculs et passer du langage naturel au langage mathématique symbolique pour traduire la thèse.

Ils devront ensuite utiliser la propriété démontrée pour justifier que la somme des scores peut toujours valoir 1. Il leur suffira d'en reconnaître les modalités d'application pour utiliser la propriété avec $a = \frac{1}{\sum_{i=1}^n s_i}$.

Partie 2

Dans un premier temps, le système est résolu par les élèves à l'aide des méthodes de substitution et de combinaison, ce qui exige une mise en relation des différentes équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \frac{s_4}{2} \\ s_2 = \frac{s_1}{2} + \frac{s_5}{3} \\ s_3 = \frac{s_1}{2} + \frac{s_4}{2} + \frac{s_5}{3} \\ s_4 = \frac{s_3}{2} + \frac{s_5}{3} \\ s_5 = \frac{s_3}{2} \end{array} \right.$$

En remplaçant s_1 et s_5 nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \frac{s_4}{2} \\ s_5 = \frac{s_3}{2} \\ s_2 = \frac{s_4}{4} + \frac{s_3}{6} \\ s_4 = \frac{s_3}{2} + \frac{s_3}{6} \Leftrightarrow s_4 = \frac{2s_3}{3} \\ s_3 = \frac{s_4}{4} + \frac{s_4}{2} + \frac{s_3}{6} \Leftrightarrow \frac{3s_4}{4} = \frac{5s_3}{6} \Leftrightarrow s_4 = \frac{10s_3}{9} \end{array} \right.$$

Donc, $\frac{2s_3}{3} = \frac{10s_3}{9}$ ce qui est possible si et seulement si $s_3 = 0$

Dès lors, $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 0$

Ensuite, ils doivent vérifier que des vecteurs donnés sont solutions du système qu'ils construisent à partir d'un nouveau graphe orienté. Ils ont donc besoin de faire appel à une question précédente pour appliquer les règles et interpréter le graphe, ce qui nécessite de passer du registre graphique au registre algébrique.

Enfin, ils devront conclure que ces situations (qu'un vecteur nul soit solution ou que plusieurs solutions soient possibles) ne sont pas acceptables dans le cadre de la recherche de scores : il s'agit cette fois d'une interprétation des résultats mathématiques en termes de détermination de scores.

Partie 3

Dans le but d'éviter ces situations, Page et Brin ont décidé de modifier la matrice B en lui appliquant deux opérations successives. Les élèves auront pour mission d'appliquer ces changements et d'analyser le choix de la valeur de α :

- remplacer les 0 de la colonne nulle par $\frac{1}{n}$ où n est la dimension de la matrice,
- multiplier chaque élément de cette nouvelle matrice par $\alpha = 0,85$ et leur ajouter ensuite $\frac{1-\alpha}{n}$.
- Pourquoi prendre $\alpha=0,85$?

Si $\alpha=1$ alors Dès lors, plus la valeur de α est proche de 1, plus on est proche Cependant, choisir α trop proche de 1 peut endommager la rapidité et la stabilité des calculs.

Cette partie demande la connaissance des opérations sur les matrices et correspondent à des tâches simples et isolées. Il s'agit de manipulations algébriques.

Existence et unicité de la solution

Les élèves doivent prouver qu'il existe toujours une et une seule solution de $Gs = s$. Pour cela, deux théorèmes leur sont donnés :

Théorème 1 (Perron-Frobenius)

Si G est une matrice strictement positive alors il existe un unique réel a et un vecteur à composantes strictement positives s (unique à multiples près) tels que $Gs = as$

Théorème 2

Si G est une matrice positive telle que la somme des termes de chaque ligne (ou colonne) vaut $\beta \in \mathbb{R}$ alors il existe un vecteur s tel que $Gs = \beta s$

Les connaissances à utiliser sont associées à ces deux théorèmes pour lesquels les élèves doivent repérer les modalités d'application, c'est-à-dire repérer que la matrice est strictement positive, et organiser le raisonnement en appliquant le théorème 1, ensuite le second et conclure en utilisant l'unicité. De plus, le fait que les arguments soient imbriqués et que les théorèmes n'ont jamais été enseignés auparavant complexifient la preuve.

Calcul des scores

La dernière tâche consiste cette fois à observer différentes puissances de la matrice G obtenue dans la partie 3 de la section "perturbation du modèle" et à conclure que la suite des puissances de G converge vers une matrice dont les colonnes sont toutes identiques. Il y a donc lieu de mélanger deux cadres, celui des matrices et des suites, et de faire intervenir les notions de suites et de limites, qu'ils ont déjà vues en cours.

5.4.1 Bilan

Tout d'abord, le calcul matriciel apparaît incontestablement comme un outil, ce qui représente le but premier de la tâche. Ensuite, les connaissances à mettre en fonctionnement sont en grande majorité algébriques. Les mises en fonctionnement des connaissances nécessitent des adaptations variées, parfois complexes au niveau d'enseignement visé et qui reviennent ponctuellement dans les exercices proposés aux élèves.

En effet, la progression dans la tâche demande beaucoup de mises en relation dans différents cadres et notions, par exemple entre l'intuition en langage naturel, les graphes de liens, les systèmes et les matrices. De plus, les raisonnements doivent souvent être organisés et ce travail est, a priori, à la charge des élèves.

Enfin, des indications sont intégrées tout au long de la tâche dans le but d'orienter le travail des élèves. Certaines sont moins explicites que d'autres mais en général, les énoncés fournissent aux élèves les connaissances dont ils ont besoin : le niveau de mise en fonctionnement est donc mobilisable.

5.5 Expérimentation

La réalisation de la leçon et les analyses a priori étant terminées, la phase d'expérimentation a pu commencer au mois d'avril 2011, lors de mon dernier stage. Elle s'est effectuée avec dix élèves de 6^e année, en option sciences avec huit heures de mathématiques par semaine, à l'Athénée Royal de Thuin. Ils avaient vu le calcul matriciel il y a moins d'un an mais n'avaient aucune connaissance sur Google. La séance a duré environ nonante minutes et a été filmée à l'aide d'une caméra placée dans le fond de la classe : cet enregistrement m'a permis d'analyser, a posteriori, le déroulement de la leçon.

Dans cette section, je vais décrire l'expérimentation en classe en la confrontant à l'analyse a priori. Pour ce faire, j'adapte l'*analyse des déroulements* proposée au chapitre 3. Je reprends la tâche question par question en donnant une description globale du déroulement et certaines phases, jugées mathématiquement plus intéressantes, sont analysées plus finement. Pour ce faire, je m'appuie sur différents types de tableaux pour présenter mes analyses :

- un tableau reprenant la chronologie globale du déroulement, utile pour avoir une vision d'ensemble et pour connaître le temps accordé à l'exercice,
- un tableau confrontant les activités prévues a priori et les activités possibles des élèves par le biais des interventions de l'enseignant (dont le discours est analysé),
- une caractérisation plus précise des aides apportées par l'enseignant,
- une comparaison des activités a priori et possibles.

Toutefois, ils ne seront pas utilisés tous, tout le temps.

5.5.1 Description globale

Les phases de recherche sont traitées de deux manières : soit les élèves travaillent individuellement (pour tout ce qui est calcul ou recherche d'intuition), soit ils échangent oralement leurs idées en restant à leur place (lors des exercices plus difficiles). Dans les deux cas, le professeur intervient collectivement.

En ce qui concerne les corrections, elles sont écrites au tableau, par l'enseignant ou par un élève, en tenant compte des interventions de la classe.

5.5.2 Analyse des déroulements

Introduction

L'exposé a débuté par une courte explication sur le but du mémoire et en montrant aux élèves le livre *Google's PageRank* utilisé pour la réalisation de la leçon. Le cours a commencé avec la question "À quoi sert Google?", ce qui a engendré une petite discussion les amenant à citer le classement des pages internet. Plus précisément, deux élèves ont proposé "faire des recherches" et "il donne des sites". L'enseignant a donc demandé si Google donnait les sites au hasard et c'est là qu'un troisième élève a apporté la solution : "non il y a un classement".

L'idée de base

Les élèves ont joué le jeu et se sont comportés comme je l'espérais. Seulement quatre d'entre eux, plus timides, n'ont pas pris la parole mais étaient néanmoins attentifs. Les deux petites questions de cette section ont été traitées de la même façon, l'une après l'autre : j'ai lu l'énoncé, les élèves ont écrit leurs idées sur leur feuille et la correction s'est faite collectivement par la mise en commun des différentes réponses suivie d'une sélection et d'une reformulation de celle attendue. Cette partie n'apporte pas d'information mathématique mais a été très utile pour amener les élèves à s'imprégner de ce nouveau domaine.

Les règles à suivre

Avant de décrire les deux règles en termes de pages et d'importance, les élèves ont été amenés à les définir dans le cas particulier. J'ai débuté la correction avec un petit sondage sur le nombre de chanteurs qu'ils ont listés pour ensuite leur demander la différence qu'il y aura entre les "sites extrêmes". Voici la discussion qui a suivi :

Enseignant	Élèves
Bilan, but déclaratif Sophie a mis un seul chanteur alors que Benoit en a écrit 4. Quand il va parler de ses chanteurs sur son site, il va donc partager ses connaissances.	

Engagement, but commissif

Que peut-on alors dire de Sophie par rapport à Benoit ?

- Qu'elle connaît moins que lui...
- Qu'il y aura moins d'informations...
- Non pas forcément ! Justement elle va peut-être plus approfondir.

Réponse-Partage, but assertif

C'est bien ça l'idée. Comme Sophie n'en a qu'un, on pourra la considérer comme plus spécialisée que Benoit.

La seconde intuition, c'est-à-dire le fait que certaines pages ont plus de crédit, était plus évidente et a tout de suite été trouvée ! Par contre, le passage vers l'explication en termes de références dans le cas général était plus délicat et les élèves ont eu besoin de beaucoup d'aide. Ils n'ont sans doute pas compris le changement de point de vue attendu : la transition entre la situation concrète et l'explication avec l'importance des références ne s'est pas réalisée comme attendu dans l'analyse a priori. Ce constat est clairement illustré par l'intervention d'un élève ayant répondu "il faut être spécialisé donc on met 10 au site de muse et 5 à celui de Robertine". J'avais beau reformuler, il a été impossible de leur extirper la bonne réponse.

Application des règles

Cette sous-tâche a été appréciée des élèves et ils l'ont bien réalisée. En effet, il y a eu beaucoup de participations et grâce aux aides apportées par l'enseignant, ils ont pu répondre aux questions. Peut-être parce qu'elle ressemblait plus à ce dont ils ont l'habitude : elle a un côté traduction de problème. Ici, j'analyse finement le déroulement.

Chronologie globale du déroulement organisé par l'enseignant

Explications sur la lecture du graphe des liens	2min30
Traduction de R_1	
Recherche individuelle	3min
Aide : l'enseignant applique R_1 en français sur un exemple	

Recherche individuelle	
Correction orale : un élève donne la bonne réponse et l'enseignant répète plus précisément	
Écriture du premier système	
Recherche individuelle	3min
Correction orale : plusieurs élèves sont interrogés les uns après les autres	
Traduction de R_2	
Recherche individuelle	3min
Aide : reformulation de R_2	
Recherche individuelle	
Un élève donne la réponse	
Écriture du deuxième système	
Recherche individuelle	3min
Correction orale : plusieurs élèves sont interrogés les uns après les autres	

Par ce tableau, on remarque que la recherche individuelle est prédominante mais que la résolution a toutefois été rapide. De plus, peu d'aides ont été nécessaires.

Activités possibles

Activités a priori	Interventions de l'enseignant	Activités possibles des élèves
Reconnaître et appliquer les connaissances algébriques au cas du calcul des scores. (si $x = a + b$ alors quand a ou b augmentent, x augmente de la même manière)	Engagement, but commisif "Comment allons-nous tenir compte de R_1 ?" L'enseignant relit la règle. Commentaire-Engagement, buts déclaratif et commisif	Recherche individuelle. Recherche individuelle : les élèves savent maintenant qu'ils doivent utiliser l'algèbre, il ne leur reste qu'à l'appliquer.

	<p>Aide : "Par exemple, si P_1 ou P_5 ont un score élevé alors nous le voulons également pour les pages qu'elles référencent telle que P_2. Comment pouvons-nous lier s_1, s_2 et s_5 afin de traduire cette situation?"</p> <p>Bilan-Partage, but assertif L'enseignant dicte la réponse attendue en français en sollicitant les élèves.</p>	<p>Un élève répond oralement : "$s_2 = s_1 + s_5$"</p>
<p>Passer du langage naturel au langage mathématique (la règle donnée en français</p>	<p>"Distribution des tâches, but directif Appliquez cette règle aux autres pages en complétant le système donné"</p>	<p>Recherche individuelle</p>
<p>doit être écrite sous forme d'un système) et passer du registre graphique au registre algébrique (traduire le graphe des liens en système).</p>		<p>Correction : les élèves sont interrogés oralement et l'enseignant copie leurs réponses.</p>

<p>Reconnaître et appliquer que plus le dénominateur d'une fraction est grand, plus cette dernière est petite.</p>	<p>Engagement, but commissif "Comment allons-nous tenir compte de R_2?" L'enseignant relit la règle.</p> <p>Commentaire, but commissif Aide : "Comment faire intervenir le nombre de liens pour que lorsqu'il augmente, le score diminue"</p>	<p>Recherche individuelle.</p> <p>Recherche individuelle</p> <p>Un élève donne la réponse.</p>
<p>Passer du langage naturel au langage mathématique (la règle donnée en français doit être appliquée au système) et passer du registre graphique au registre algébrique (trouver le nombre de liens d'une page dans le graphe).</p>	<p>Distribution des tâches, but directif "Complétez le système."</p>	<p>Recherche individuelle</p> <p>Correction : les élèves dictent leurs réponses à l'enseignant qui copie au tableau.</p>

Aides

Pour rappel, les aides sont dites procédurales lorsqu'elles modifient les tâches prévues. Ici, on en retrouve à deux reprises : en début de résolution en rappelant et en reformulant les règles vues auparavant et pour débloquer les élèves après une première recherche individuelle. Dans la recherche de R_1 , la tâche a été réduite à appliquer le conseil à un exemple. Par contre, pour R_2 , l'aide oriente légèrement les élèves mais ne modifie fondamentalement pas les activités prévues.

Comparaison des activités possibles et a priori

De manière générale, les aides et commentaires apportés par l'enseignant n'ont pas modifié les activités prévues des élèves. Toutefois, leur travail de recherche a été facilité par les interventions de l'enseignant puisqu'ils ont incontestablement été orientés. De plus, il est à noter qu'un seul élève a trouvé qu'il fallait diviser par le nombre de liens.

Modélisation du problème

Pour cette partie, les élèves ont éprouvé beaucoup de difficultés. Ils ont été capables de citer les méthodes de substitution et de combinaison immédiatement. Lorsque je leur ai dit qu'il en restait une, ils ont tout de suite pensé aux matrices. Par contre, leurs connaissances sur le sujet étaient très vagues... La modélisation du système à l'aide des matrices a été un travail laborieux qui a nécessité énormément d'aides et de rappels. Sans indication, les élèves ne pouvaient que me donner des mots dont ils se souvenaient : matrice augmentée, déterminant, "mettre des zéros dans une matrice",... Mais aucun n'était capable de fournir la réponse attendue.

Une aide largement procédurale a été indispensable : "vous devez retomber sur une égalité du type $B.S = S$ où B est la matrice des coefficients et S est une matrice colonne contenant les inconnues". Malgré cette information, ils restaient perdus. Je leur ai donc demandé de me rappeler comment faire le produit de deux matrices (ils s'en souvenaient bien, avec la méthode des deux mains²) et leur ai montré le lien entre ce produit et les lignes d'équations du système. Ils ont alors compris et plusieurs d'entre eux sont allés au tableau pour compléter la matrice B .

La seconde partie de l'exercice, consistant à mettre en parallèle le graphe des liens et la matrice des coefficients, a posé nettement moins de problèmes aux élèves. Je leur ai donné un élément quelconque de la matrice et leur ai demandé de me dire ce qu'il traduisait. Directement, plusieurs d'entre eux sont intervenus.

Au niveau du discours de l'enseignant, sa fonction a été globalement d'introduire des sous-tâches (fractionner la résolution) et de structurer c'est-à-dire d'explicitier la séquentialité. Quant aux buts illocutoires, ils oscillaient entre assertif lors des rappels de théorie (considérée comme vraie et incontestable par les élèves) et commissif lorsque les élèves avaient pour mission de chercher les réponses.

2. il s'agit de balayer les lignes de la première matrice avec la main gauche et les colonnes de la seconde matrice avec la main droite afin de ne pas faire d'erreur dans les sommes des produits

En conclusion, les activités possibles des élèves ne correspondent plus du tout à ce qui avait été prévu dans l'analyse a priori. Toute la réflexion liée au mélange des cadres et notions est devenue une tâche simple et isolée.

Perturbation du modèle

Partie 1

Chronologie globale du déroulement organisé par l'enseignant

Preuve	
Travail collectif pour démarrer la preuve	12min
Recherche individuelle	
Aide : "t solution de $Bs = s$ signifie que $Bt = t$ or ici nous voulons montrer que as satisfait $Bs = s$ donc..."	
Recherche individuelle	
Aide : "que peut-on faire des parenthèses ? Pourquoi ?"	
Correction orale (plusieurs élèves interviennent pour formuler la bonne réponse)	
Application de la propriété	
Aide : réduction de la réflexion dans le cas où il y a trois scores	5min
Recherche individuelle	
Correction orale (un élève donne la réponse)	

On remarque ici que les élèves ont eu besoin de beaucoup de temps et d'aides pour terminer cet exercice.

Activités possibles

Activités a priori	Interventions de l'enseignant	Activités possibles des élèves
<p>Introduire un intermédiaire (un réel a)</p>	<p>Introduction d'une sous-tâche, but commissif "Avec quoi allons-nous démarrer la preuve?" Un élève répond immédiatement un multiple de s. L'enseignant demande donc quelle est l'allure d'un multiple de s. Après quelques secondes, plusieurs élèves trouvent la réponse.</p>	<p>Recherche individuelle suivie immédiatement d'une correction. L'enseignant a mené sur la voie mais n'a pas modifier la tâche a priori.</p>
<p>Organiser les calculs et passer du langage naturelle au langage mathématique</p>	<p>Distribution des tâches, but commissif-déclaratif Les élèves ne parvenaient pas à démarrer la preuve. L'enseignant a dû intervenir plusieurs fois en apportant de précieuses indications sur la traduction mathématique de l'énoncé.</p>	<p>Il s'agissait au départ d'une recherche individuelle, virant peu à peu vers un travail collectif. Les activités possibles des élèves correspondent dès lors à une tâche simple et isolée.</p>

Reconnaître les propriétés à utiliser	<p>Distribution des tâches, but commissif Une fois encore, les élèves étaient perdus. L'enseignant a dû les inviter à se préoccuper des parenthèses pour qu'ils puissent continuer la preuve.</p>	Recherche individuelle durant laquelle les élèves doivent reconnaître l'associativité du produit de matrices, la commutativité du produit d'une matrice par un scalaire et l'hypothèse $Bs = s$.
Reconnaître les modalités d'application de la propriété	<p>Introduction d'une sous-tâche, but commissif L'enseignant réduit l'énoncé à 3 scores et écrit $s_1 + s_2 + s_3$ au tableau.</p> <p>"Il n'y a aucune raison pour que cette somme vaille 1... Mais que peut-on lui appliquer pour retrouver quelque chose égale à 1?"</p> <p>"Diviser par $s_1 + s_2 + s_3$ revient à multiplier s par $\frac{1}{s_1 + s_2 + s_3}$. Ça ne vous rappelle rien?"</p>	<p>Recherche collective. Il s'agit ici d'une tâche simple et isolée</p> <p>Bien qu'aiguillés, les élèves doivent reconnaître la propriété qu'ils viennent de voir.</p>

Aides

Une aide constructive a tout d'abord amené les élèves à trouver le réel à introduire pour débiter la preuve : l'enseignant a ajouté une étape à leur réflexion consistant à développer la thèse. Par contre, deux aides procédurales ont été indispensables pour débloquent les élèves. D'une part la réalisation de la première tâche à la place des élèves c'est la traduction de la thèse en mathématiques. D'autre part l'orientation de la réflexion en attirant leur attention sur les parenthèses. Enfin, les élèves ne trouvant pas le lien avec le but de départ (égaler la somme des scores

à 1), l'enseignant fournit une aide constructive (travailler sur $s_1 + s_2 + s_3$) et une autre légèrement procédurale (la reformulation de la division par $s_1 + s_2 + s_3$).

Comparaison des activités possibles et a priori

Globalement, l'enseignant n'a pas trop modifié les tâches prévues a priori. Hormis le passage du langage naturel au langage mathématique lié à la thèse, les adaptations prévues ont été simplifiées mais pas changées.

Partie 2

La résolution du système a pris 9min. Elle a débuté par une recherche individuelle mais comme la moitié des élèves était bloquée, j'ai corrigé le début en les sollicitant : remplacer s_1 et s_5 par, respectivement, $\frac{s_4}{2}$ et $\frac{s_3}{2}$ dans les autres équations. Je leur ai ensuite demandé de comparer les équations $s_4 = \frac{s_3}{2} + \frac{s_3}{6}$ et $s_3 = \frac{s_4}{4} + \frac{s_4}{2} + \frac{s_3}{6}$. Après une autre phase de recherche, la plupart avait terminé. J'ai alors envoyé l'un d'entre eux au tableau pour qu'il présente sa correction.

L'écriture du système et la vérification des solutions se sont parfaitement déroulées : les élèves n'ont pas eu besoin d'aide.

Enfin, je leur ai demandé de m'expliquer à quoi correspondait ces solutions. Ils ont pu me répondre qu'il s'agissait des scores des pages mais j'ai dû les aider pour qu'ils puissent conclure qu'elles étaient à exclure : "que se passe-t-il si tous les scores valent 0?", "comme on a plusieurs solutions, laquelle allons-nous choisir?".

Partie 3

Cette partie ne requiert pas une analyse précise : c'est calculatoire et les élèves n'ont éprouvé aucune difficulté.

Existence et unicité de la solution

Activités possibles

Activité a priori	Interventions collectives	Activités possibles des élèves
Reconnaître les modalités d'application des théorèmes	Engagement, but commissif "Que nous faut-il pour utiliser les théorèmes?" Plusieurs élèves répondent directement qu'il faut une matrice positive. L'enseignant leur demande si on en a une sous la main et l'un d'entre eux propose G	Recherche individuelle suivie immédiatement d'une correction. L'enseignant a mené sur la voie mais n'a pas modifié la tâche a priori.
Organiser le raisonnement	Structuration, but directif-commissif Les élèves ne parvenant pas à construire la démonstration, l'enseignant a dû leur dire d'appliquer successivement le théorème 1 et le théorème 2.	Recherche individuelle. La tâche est simple et isolée.

Aides

L'enseignant a aidé de manière procédurale. En effet, les tâches ont été largement modifiées par ses interventions collectives : il a guidé les élèves pour qu'ils commencent la preuve et a ensuite découpé la démonstration.

Comparaison des activités possibles et a priori

Tâches a priori et activités possibles ont peu de choses en commun ! Les élèves ont largement été orienté vers la matrice G et l'organisation du raisonnement a été abolie.

Calcul des scores

Les élèves ont tout de suite remarqué qu'il n'y avait pas de différence entre G^{20} et G^{200} et que les colonnes étaient identiques. Ensuite, l'enseignant a reformulé leur réponse, ce qui les a mis sur la voie des limites : "autrement dit, plus l'exposant est élevé, plus on se rapproche d'une matrice dont les colonnes sont identiques...". Tâche a priori et activités possibles sont donc similaires bien que le changement de cadre soit suggéré par l'intervention du professeur dont le discours a servi de bilan par le biais d'une reformulation plus qu'explicite menant à la notion de suite et limite.

5.6 Bilan

À la question "est-il possible de proposer un problème pour lequel les matrices apparaissent comme outil de résolution?", la réponse est clairement oui. En effet, la tâche Google a pu être adaptée et présentée aux élèves en nonante minutes. Mieux encore, elle a un impact très positif sur leurs apprentissages, aussi bien en pratique qu'en théorie. Toutefois, n'ayant pas effectué d'interrogation, l'évaluation des apprentissages est limitée aux analyses des contenus et des déroulements.

Au niveau du contenu, l'analyse a priori a mis en évidence un atout de taille pour cette tâche : elle fait varier les activités des élèves et les amène à travailler d'une manière plus proche de celle requise à l'université. Les changements de cadres, registres et points de vue sont omniprésents, ce qui correspond à un exercice mental très enrichissant mais difficile pour les élèves qui n'en ont pas l'habitude (Robert, 1998). Ils permettent de confronter les réponses mathématiques à une situation concrète et de discuter la vraisemblance des solutions : les élèves, toujours demandeurs d'utilités des mathématiques, réalisent la complexité de ce contexte. De plus, cette tâche présente des exercices de démonstrations faisant intervenir l'organisation du raisonnement, l'introduction d'intermédiaires et la reconnaissance des modalités d'application de théorèmes parfois nouveau.

En pratique, les élèves se sont vraiment impliqués dans la leçon. Je pensais que certains considéreraient ce cours comme inutile étant donné qu'il s'agissait d'une matière hors programme et donc dépourvue d'interrogation. Or, ils ont directement apprécié l'idée, particulièrement lorsqu'ils ont eu des informations relevant plus de la culture générale. Dès l'introduction, ils ont montré beaucoup d'intérêt : tout ceci pousse à croire que le thème est accrocheur. Le niveau de difficulté était apparemment adapté : les élèves sont restés concentrés et motivés jusqu'au bout.

Ils essayaient tous, à différents moments, de formuler des réponses. Ils étaient très actifs (dans le bon sens du terme) et n'étaient pas non plus avares de questions, ce qui amenait des discussions constructives, débordant parfois de la matière prévue. En ce qui concerne les activités possibles des élèves, elles correspondent plus ou moins à celles prévues mais il est évident que les aides de l'enseignant ont simplifié leur travail, en particulier lors des démonstrations. Toutefois, on peut considérer ces activités comme bénéfiques puisqu'elles ont poussé les élèves dans une réflexion différente de leurs habitudes. Soulignons que les élèves avaient étudié le calcul matriciel et la résolution des systèmes d'équations moins d'un an auparavant mais que ces connaissances n'étaient plus disponibles au moment de l'expérimentation de Google.

Enfin, le point fort de Google est que son fonctionnement fait intervenir bon nombre de notions : le calcul matriciel, les systèmes d'équations, les graphes orientés et les limites de suites. De plus, ce n'est pas stipulé ici, mais le calcul de probabilités³ peut être abordé. Toutefois, cette tâche ne s'est pas réalisée sans difficultés. En effet, la construction d'une leçon à partir de documents et notions complètement inadaptés pour des élèves du secondaire nécessite beaucoup de travail, en particulier de l'imagination et de nombreuses analyses de tâches amenant des modifications. Quant à l'expérimentation, il n'a pas été simple d'aider les élèves sans supprimer les tâches qui leur étaient confiées. En tout cas, on peut considérer que cette tâche est une réussite.

3. Annexe II

Chapitre 6

Formalisme et exigences universitaires : expérimentation en BAC1

Nous avons formulé au chapitre 2 un questionnement concernant l'enseignement universitaire. Celui-ci, tout d'abord général, portait sur les difficultés soulevées par Dorier, Tanguay et Corriveau à propos du formalisme nouveau que les étudiants à l'université pouvaient rencontrer. Je me suis ensuite penchée sur les nouvelles exigences (cf Robert, 1998) du cadre universitaire qui pouvaient également faire obstacle à la réussite. Un autre apport concerne les registres de représentation que Duval (1993) et Dorier (1997) ont traités avec la conversion entre les registres, les mêmes symboles dans différents cadres et la difficulté de sortir d'un nouveau cadre pour travailler avec de l'ancien plus familier.

Ces travaux mettaient en lueur des difficultés répertoriées chez les étudiants. L'objectif consiste ici à étudier si toutes les hypothèses se vérifient spécifiquement au cadre du calcul matriciel. Par conséquent, il s'agit de mesurer l'impact, sur la capacité de résolution des étudiants, de l'obstacle du formalisme avec toutes ses variantes, des nouvelles pratiques attendues et des manipulations sur les registres précisés au chapitre 4.

Pour ce faire, des exercices faisant intervenir un formalisme lié aux matrices sont analysés. Ils sont issus d'interrogations et d'examens du cours de Mathématiques élémentaires proposés durant les années 2009-2010 ou 2010-2011. Rappelons que ce cours est donné en 1^{ère} année à l'Umons aux étudiants inscrits en mathématiques, physique ou informatique.

6.1 Méthodologie

Afin de caractériser les difficultés observées dans les copies, une méthodologie précise est utilisée pour analyser les exercices et les mettre en rapport avec le chapitre 4. Celle-ci s'appuie sur une analyse en deux étapes : la première concerne l'énoncé et la seconde porte sur les productions des étudiants.

À partir de l'énoncé, il est possible de dégager ce que les étudiants sont censés accomplir afin d'évaluer la complexité des tâches qui leur sont soumises. Pour ce faire, l'utilisation de la théorie de l'activité du chapitre 3 et le travail de Robert (1998) du chapitre 4 est requise :

- une analyse a priori en termes d'adaptations des connaissances est menée,
- un repérage des nouvelles pratiques attendues est effectué.

Ensuite, les productions des étudiants sont analysées dans le but de faire un lien avec les difficultés présumées du chapitre 4. Des constats globaux sont formulés et des exemples de production sont parfois donnés.

6.2 Tâche 1

(a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Définissez "A est antisymétrique".

(b) Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par $M_{ij} = i^{42} - j^{42}$.

Montrez que M est une matrice antisymétrique.

(c) Utilisez le point précédent pour calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i^{42} - j^{42})$.

Expliquez votre démarche.

Résolution

(a) A est antisymétrique si $A^t = -A$

(b) Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$. On doit montrer que $M_{ij}^t = -M_{ij}$
c'est-à-dire $M_{ji} = -M_{ij}$.

Or, $M_{ji} = j^{42} - i^{42} = -(i^{42} - j^{42}) = -M_{ij}$

Donc, M est antisymétrique.

(c) En fait, il faut calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}$, ce qui revient à additionner tous les éléments de la matrice M . Or, on a montré en (b) que la matrice M est antisymétrique, ce qui signifie que les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont des nombres opposés qui vont s'annuler lors de cette addition. De plus, les éléments sur la diagonale sont nuls. Dès lors, la double somme vaut 0.

6.2.1 Analyse a priori

Pour cet exercice, les connaissances à mettre en fonctionnement relèvent du calcul matriciel, avec les définitions de matrice antisymétrique et de transposée, ainsi que l'utilisation du double symbole sommatoire.

Le point (a) teste la connaissance d'une définition.

Pour résoudre (b), les étudiants doivent choisir un registre de représentation du cadre des matrices : travailler avec un élément quelconque de M en utilisant l'écriture indicée. Après ce choix, ils appliquent la définition de matrice antisymétrique et de transposée à ce registre. Enfin, il leur reste à introduire une étape, le calcul de M_{ji} , qu'ils doivent organiser à partir de manipulations algébriques pour s'apercevoir que $M_{ji} = -M_{ij}$.

Le point (c) fait tout d'abord intervenir la question précédente en remplaçant $(i^{42} - j^{42})$ par M_{ij} . Ensuite, un changement de cadre permet de traduire la double somme en termes de somme d'éléments de M : il s'agit du passage du cadre des sommations au cadre des matrices. La conclusion relève de l'utilisation du point (b), en se rappelant que M est antisymétrique : une adaptation de la définition pour l'écriture indicée (autrement dit, déduire de $M^t = -M$ que $\forall i, j \in \mathbb{N}_0$ $M_{ji} = -M_{ij}$ et $M_{ii} = 0$) et d'une organisation des calculs pour faire apparaître que la somme des éléments de la matrice M vaut en fait 0.

Dès lors, le niveau de mise en fonctionnement est mobilisable. En effet, de nombreuses adaptations sont à réaliser mais des indications sont fournies par le biais des sous-questions.

6.2.2 Nouvelles pratiques attendues

Tout d'abord, il s'agit d'un problème qui n'est a priori pas proposé dans le secondaire puisque les seuls exercices prévus à ce niveau sont au sein du cadre

des matrices et les démonstrations ne concernent que les propriétés internes au chapitre. Or ici, il y a un mélange de cadres ainsi qu'une généralisation et une décontextualisation : les étudiants travaillent avec une dimension n et la double somme ne fait pas directement apparaître le contexte matriciel.

En ce qui concerne les arguments à utiliser, ils sont peu nombreux et ne se répètent pas : il n'y a que l'antisymétrie de M et la traduction de la double somme en termes d'éléments de la matrice à faire intervenir. Par contre, les définitions nécessitent une adaptation car ils doivent les appliquer à un autre registre : passer de la matrice "entière" à son écriture indicée.

6.2.3 Analyse des productions

Septante étudiants ont été interrogés et seulement 13% ont correctement répondu à l'ensemble de la tâche contre et 18,5% qui ont obtenu zéro.

Question (a)

A priori, le seul but de cette question était de la mettre en relation avec les erreurs des deux points suivants de l'exercice : savoir si les étudiants ne parvenaient pas à résoudre la suite de l'exercice à cause de lacunes avec la définition. Or, il s'est avéré que certaines copies illustrent les propos de la partie théorique, au chapitre 4.

En effet, sur les 32 étudiants ayant échoué, deux types de réponses se sont dégagés : on peut suspecter un manque d'étude, faisant apparaître des définitions parfois très loufoques, ou des difficultés de formulation. La deuxième catégorie illustre des difficultés liées au formalisme ou au symbolisme ; en voici deux exemples :

1. "Cela signifie que $A^t = -A$ càd $\forall i, j \in \mathbb{N} \setminus \{0\} A_{ij} = -A_{ji}^t$ et $A_{ii} = A_{jj} = 0$ "
2. "A est antisymétrique si et seulement si sur sa diagonale, ses éléments sont nuls et si les éléments sont symétriques par rapport à cette diagonale tout en étant opposés."

La première proposition fait apparaître une erreur due au changement de registre : l'étudiant connaissait la définition mais n'a pas été capable de l'adapter quand il a décidé de l'écrire avec un élément quelconque. Ceci s'associe aux dires de Duval(1993) expliqués au chapitre 4, section 3 : si l'étudiant avait complètement acquis la notion, il n'aurait pas commis cette erreur. De plus, il ne réalise pas que A_{ii} et A_{jj} représentent les mêmes éléments, ce qui correspond à l'obstacle du

formalisme : il y a manipulation de symboles sans comprendre parfaitement à quoi ils correspondent.

L'exemple 2 reflète quant à lui le refus d'utiliser le formalisme mathématique : l'étudiant a tenté une explication, compliquée, avec le langage naturel alors que la réponse tenait en une courte égalité. Il donne donc l'impression de ne pas comprendre la définition lorsqu'elle est donnée formellement, ce qui rejoint Froger (2003) avec sa corrélation entre la simplicité de l'écriture et la complexité de compréhension (chapitre 4, section 2).

Question (b)

Par les erreurs diverses et variées rencontrées pour cette deuxième question, on peut estimer que l'obstacle du formalisme s'y est révélé. En effet, les étudiants auraient probablement rencontré moins de difficultés pour remarquer si une matrice de réels explicites était antisymétrique : c'est l'écriture formelle qui les a empêchés d'appliquer leur définition.

Par exemple, un quart des étudiants a commencé la résolution en écrivant explicitement la matrice, en y indiquant les éléments M_{ij} ou en calculant les premiers coefficients. Certains ont également ôté la difficulté de la généralisation en posant $n=3$ pour pouvoir écrire M au complet et conclure "qu'on peut voir que M est antisymétrique". Était-ce peut-être un moyen de se raccrocher à une matrice plus concrète pour eux car ils ne parvenaient pas à manipuler symboliquement M_{ij} . De plus, plusieurs étudiants ont affirmé que la diagonale était nulle et que les éléments de part et d'autres opposés mais ne l'ont pas prouvé : ils savaient donc ce qu'ils avaient à faire mais n'y sont pas parvenus à cause d'un blocage avec l'écriture.

Enfin, quelques réponses ont révélé le même genre d'erreurs que celles données par Corriveau (2007) pour l'obstacle du formalisme : plusieurs étudiants ont écrit que M^t était équivalent à M_{ji}^t ce qui montre bien une manipulation des formules sans en comprendre le sens.

Question (c)

Cette dernière sous-tâche est très simple pour l'étudiant à l'aise avec le formalisme. Par contre, les autres peuvent se retrouver avec des justifications imprécises, voire incohérentes, ou avec de longs raisonnements pour calculer la double somme sans se rapporter à la matrice M .

Des erreurs causées par un changement de registre sont apparues. Par exemple, un étudiant a bien représenté la matrice pour mettre en évidence les éléments opposés mais lorsqu'il a voulu traduire la situation avec un symbole sommatoire, il n'a pas réalisé qu'il écrivait, en réalité, que la somme des éléments de chaque colonne valait 0 : "si $i=1$ alors $\sum_{j=1}^n (i^{42} - j^{42}) = 0$. Si $i=2$ alors ...". Un étudiant a quant à lui été incapable de comprendre correctement la double sommation : il a associé celle-ci à la trace de la matrice c'est-à-dire la somme des éléments sur la diagonale.

Enfin, une dizaine d'étudiants s'est lancée dans le calcul sans même prêter attention au point (b). Ils ont calculé, de manière systématiquement erronée, sans savoir ce que représentait cette double sommation alors que ça leur était largement suggéré... Cette résolution illustre bien l'obstacle du formalisme ainsi que les difficultés dues à la décontextualisation : les étudiants alignent des formules sans se demander à quoi elles correspondent en ne faisant pas de lien avec M .

6.3 Tâche 2

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\gamma & -\delta \\ \beta & \alpha & \delta & -\gamma \\ \gamma & -\delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}_0$

(a) Calculez $M^t M$.

(b) Du point précédent, déduisez M^{-1} . Expliquez votre démarche.

Résolution

(a) On a

$$\begin{aligned} M^t M &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\beta & \alpha & -\delta & \gamma \\ -\gamma & \delta & \alpha & -\beta \\ -\delta & -\gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\gamma & -\delta \\ \beta & \alpha & \delta & -\gamma \\ \gamma & -\delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Par le point précédent, on obtient $M^t M = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) \cdot \mathbb{1}$

Or, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ car $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$ par hypothèse et $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2 \geq 0$.

On peut donc diviser les deux membres de l'égalité par $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)$ et obtenir ainsi :

$$\frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)} M^t M = \mathbb{1}$$

Par un raisonnement similaire, on montre que $M \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)} M^t = \mathbb{1}$

$$\text{Dès lors, } M^{-1} = \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)} M^t$$

6.3.1 Analyse a priori

Tout d'abord, le point (a) demande la connaissance du produit de matrices et de la transposée. Toutefois, il ne s'agit ici que d'une application directe n'exigeant pas d'adaptation : cette tâche est donc simple et isolée.

La deuxième sous-tâche fait intervenir l'inverse d'une matrice, le produit d'une matrice par un scalaire et les conditions de simplification. Les étudiants doivent commencer par introduire un intermédiaire : la matrice identité. Ensuite, l'organisation de leur raisonnement permet d'aboutir à un produit égal à $\mathbb{1}$. Ils doivent alors reconnaître la définition de la matrice inverse et choisir $M^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2} M^t$.

Le niveau de mise en fonctionnement est mobilisable car des arguments doivent être articulés mais l'énoncé stipule bien que les deux sous-tâches sont liées, ce qui fournit aux étudiants une indication précieuse.

6.3.2 Nouvelles pratiques attendues

Avant tout, plusieurs arguments sont à utiliser pour trouver la matrice inverse. En effet, il y a la réécriture de la matrice diagonale donnée par $M^t M$, suivie de la simplification de l'égalité par $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$, entraînant une discussion sur le caractère non nul de ce scalaire, et enfin la précision sur le fait qu'il est possible d'obtenir l'autre produit, nécessaire à la vérification de la définition, à savoir $M \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2} M^t = \mathbb{1}$. Cette dernière étant similaire à la première partie de la résolution, elle peut être qualifiée d'arguments à appliquer à répétition, autre élément de complexité indiqué par Robert (1998).

De plus, un changement de cadres est perceptible au cours de l'organisation de leurs calculs : les étudiants ne doivent pas oublier de vérifier que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$. Or, plongés dans le cadre des matrices, ils peuvent oublier cette justification qui relève de connaissances plus antérieures : c'est ce que Dorier (1997) a suggéré au chapitre 4.

6.3.3 Analyse des productions

Le premier bilan est mitigé : sur 70 étudiants, seulement 5 ont correctement répondu aux deux questions et 7 n'ont obtenu aucun point. Les autres ont, en moyenne, 55%.

Question (a)

Cette sous-tâche a été globalement très bien réussie puisque 58 étudiants ont réussi à calculer $M^t M$. Les erreurs les plus fréquentes provenaient de confusions dans les définitions : méprise entre transposée et cofacteur ou encore transposée et inverse.

L'obstacle du formalisme en tant que tel ne s'est pas illustré avec cet exercice. En effet, malgré les nombreux symboles, celui-ci était trop calculatoire pour mettre les étudiants en difficultés. Toutefois, des ébauches de problèmes dus au formalisme ont pu être mis en évidence. Certains ont donné des valeurs aléatoires aux variables avant d'effectuer le produit, afin de le rendre plus concret pour eux. D'autres n'ont pas su écrire la matrice transposée alors qu'ils connaissaient la définition non formelle "échanger lignes et colonnes" : ils ont effectivement permuté des lignes et des colonnes, mais pas les bonnes !

Question (b)

Cette fois, le constat est plus négatif avec seulement 5 bonnes résolutions. Une erreur est apparue sur 40 des copies, au niveau de la simplification. Ceci illustre les propos de Dorier (1997) : les étudiants travaillant dans un "nouveau" cadre ont tendance à oublier les autres, avec lesquels ils sont normalement à l'aise. C'est en effet le cas ici puisque les étudiants ont bien traité le cas des matrices mais ont été incapables d'effectuer et/ou de justifier correctement une simplification de l'égalité obtenue.

La pluralité d'arguments, citée par Robert, a également affecté le travail des étudiants. En effet, beaucoup n'ont pas remarqué que la matrice diagonale pouvait se réécrire comme le produit de l'identité par un scalaire ce qui les a empêchés de résoudre l'exercice.

Voici des exemples d'autres types d'erreurs.

Exemple 1. Un étudiant ayant bien répondu au point (a) et propose ceci pour (b) :

La matrice inverse ou M^{-1} va valoir :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2} \end{pmatrix}$$

car comme le produit $M^t M$ n'a qu'une diagonale avec les mêmes valeurs, on divise par ces mêmes valeurs pour ramener à $\mathbb{1}$ et on divise ensuite cette matrice par les valeurs que l'on avait avant pour obtenir l'inverse.

L'étudiant a visiblement oublié qu'il manipulait un produit de matrices et non de réels ! C'est typique de l'obstacle du formalisme : on a l'impression que la confusion est due à la notation du produit qui est la même pour \mathbb{R} et $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Exemple 2. La diagonale du produit $M^t M$ est le déterminant.

Nous avons que $\frac{1}{\det} \cdot \text{Adj} = M^{-1}$

$M^t = M^{-1}$ car $M^t M = \mathbb{1}$

On sait que $M^{-1} M = \mathbb{1}$ Une matrice n'a qu'un seul inverse ce qui nous laisse penser que $M^t = M^{-1}$

Ici l'étudiant n'a pas l'air de comprendre le sens de ce qu'il écrit... Il est le parfait

exemple du constat de Corriveau (2007) : l'obstacle du formalisme fait produire aux étudiants un discours qui ressemble à celui de l'enseignant mais qui n'a aucun sens. C'est bien le cas ici : l'agencement des formules est très "beau" mais est incorrect.

6.4 Tâche 3

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. On définit la trace de A , notée $\text{tr}A$, par $\text{tr}A = \sum_{i=1}^n A_{ii}$.

Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par $M = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 2^i & \text{sinon} \end{cases}$

Calculez la trace de M . Expliquez votre démarche.

Résolution

$$\begin{aligned} \text{tr}M &= \sum_{i=1}^n M_{ii} \text{ par définition de la trace} \\ &= \sum_{i=1}^n 2^i \text{ par définition de } M \\ &= \sum_{i=0}^n 2^i - 2^0 \\ &= \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} - 1 \text{ par la question précédente} \\ &= 2^{n+1} - 2 \end{aligned}$$

6.4.1 Analyse a priori

La résolution commence par une reconnaissance des modalités d'application de la définition de trace, nouvelle pour les étudiants. Ensuite, ils doivent introduire un intermédiaire afin d'utiliser la propriété démontrée dans la question précédente : commencer la somme à $i = 0$ pour utiliser le fait que $\sum_{k=0}^n t^k = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$. Plus globalement, les étapes citées nécessitent l'organisation des calculs et du raisonnement.

Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est disponible car aucune indication n'est fournie, les étudiants doivent organiser les calculs et trouver

les arguments seuls.

6.4.2 Nouvelles pratiques attendues

Les étudiants doivent manipuler des notions nouvelles, à savoir la somme des t^k et la définition de trace, qui leur sont proposées pour la première fois dans ces énoncés. De plus, la définition de la matrice M utilise une quantification implicite car $\forall i, j \in \mathbb{N}_0$ n'est pas précisé.

6.4.3 Analyse des productions

Sur les 70 étudiants interrogés, seulement 4 ont complètement répondu à la question contre 41 échecs. Les autres ont bien appliqué la définition de trace mais n'ont pas reconnu la question précédente à utiliser pour conclure.

Plusieurs étudiants ont ressenti le besoin de changer de registre en explicitant la matrice M ...

- soit parce qu'ils savaient que les M_{ii} correspondaient aux éléments de la diagonale mais qu'ils devaient se baser sur la représentation en tableau pour en déterminer les valeurs :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2^2 & 1 & & \\ 1 & 1 & 2^3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 2^n \end{pmatrix}$$

Les éléments M_{ii} sont tous de la forme 2^i

$$\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n M_{ii} = \sum_{i=1}^n 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$$

$$= \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1 = 2^{n+1} - 2$$

Par Q2

- soit pour justifier l'égalité $\sum_{i=1}^n M_{ii} = \sum_{i=1}^n 2^i$ mais presque systématiquement, une erreur y était associée :

On dessine $M = \begin{pmatrix} 2^i & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2^i & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & 1 & 2^i & 1 & \\ \vdots & 1 & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & & 1 & 2^i \end{pmatrix}$ et la trace de $M =$ la somme des termes de la

diagonale de celle-ci (ensemble des A_{ii}). \Rightarrow cela revient à écrire $\sum_{i=1}^n 2^i = 2^1 + \dots + 2^n$
 Ici, il y a une incompréhension de ce que représente i dans la définition de la matrice : la quantification implicite dans la définition de M a donné l'impression à ces étudiants que i était fixé.

Dans le même ordre d'idée, certains ont égalé trM à cette matrice dont les éléments de la diagonale valent tous 2^i . Ils ont donc confondu un nombre réel, donné par la somme des éléments de la diagonale, avec une matrice : c'est un aspect de l'obstacle du formalisme.

Une autre erreur revenue souvent est la distinction de deux cas pour calculer la somme : $i = j$ et $i \neq j$. Les étudiants ont alors remplacé M_{ii} par 2^i ou 1 selon le cas. Ce type de réponse reflète une incompréhension totale des objets manipulés et une utilisation de formules sans comprendre à quoi elles correspondent puisqu'ils ont considéré tous les éléments de la matrice via cette discussion au lieu de simplement en additionner les éléments de la diagonale.

Enfin, diverses erreurs isolées ont été retrouvées. En voici deux exemples :

1. On sait par hypothèse que $M_{ij} = 1$ quand $i \neq j$ c'à d quand $i = i$ nous avons donc $M_{ii} = 1$

2. $M_{ii} = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_{nn} \end{pmatrix} \text{ donc } \sum_{i=1}^n M_{ii} = 2^i$

Visiblement, des étudiants ne comprennent rien au symbolisme matriciel...

6.5 Bilan

Le but de cette expérimentation était de mettre en évidence les différents points développés au chapitre 4 avec les matrices. Cette conclusion va donc mettre en rapport les différentes difficultés énoncées dans la théorie avec les productions des étudiants en Mathématiques élémentaires.

Tout d'abord, les nouvelles pratiques attendues lors du passage à l'université, repérées par Robert (1998), ont pu être confirmées par cette analyse. En effet, pour les nouveaux types de problèmes, certains étudiants faisaient disparaître leur généralité en posant $n = 3$ ou en donnant des valeurs aux variables. De plus, la décontextualisation d'une notion en bloquait beaucoup : le lien entre la double

sommation et la matrice de la première tâche n'a pas toujours été repéré. Ensuite, lorsque plusieurs arguments entraient en jeu dans une preuve, les étudiants avaient tendance à n'en trouver qu'une partie : par exemple, à la tâche 2, seules 5 réponses sur 70 étaient complètes. De plus, la répétition d'arguments s'est prononcée grâce à cette même tâche via l'obtention du produit MM^t , chose qu'aucun étudiant n'a justifiée. La tâche 3 a quant elle illustré la sélection d'informations et la quantification implicite avec la définition de M . En effet, les étudiants ne devaient pas utiliser les éléments hors de la diagonale mais beaucoup l'ont fait en considérant deux cas en fonction de i et j . De plus, " $\forall i, j \in \mathbb{N}_0$ " n'est pas précisé ce qui en a poussé à considérer 2^i comme une constante et à se retrouver avec une matrice dont tous les éléments de la diagonale valent 2^i . Ce dernier exemple reflète également un changement de registres raté.

Les analyses de ces exercices ont également permis de faire apparaître l'obstacle du formalisme sous ses différentes formes. Tout d'abord, des étudiants ont travaillé sur des formules sans tenir compte de ce qu'elles représentent. Cette caractéristique a été mise en avant par le point (c) de la première tâche pour lequel plusieurs étudiants se sont lancés dans des calculs sur la double somme sans même envisager qu'elle pouvait avoir un lien avec M définie juste avant. Une conséquence était la confusion de différentes catégories d'objets et celle-ci a été repérée avec la tâche 3 où des étudiants ont confondu un réel, défini par la trace, et une matrice.

Ensuite, Corriveau (2007) avait émis l'hypothèse que les étudiants pouvaient parfois produire un discours donnant un effet formel et correct alors qu'en réalité, il ne s'agissait que d'un texte incohérent : la tâche 2 (b) a illustré ce constat avec un exemple montrant un calcul complètement faux pour déterminer M^{-1} . La tâche 3 l'a également mis en évidence avec des calculs, correctement justifiés, mais n'ayant aucun sens : c'est le cas avec le calcul de la trace de M pour lequel de jolies formules sont écrites mais les élèves discutent de la valeur "du j ".

L'expérimentation a également mis en avant la corrélation de Froger (2003) entre les écritures et la complexité. Plus précisément, il suggère qu'une écriture mathématique simple peut exprimer des notions très compliquées. Or, même lorsqu'elles paraissent aisées, elles peuvent mener à des erreurs : par exemple, la définition de la matrice M dans la tâche 3 est simple mais de nombreux étudiants l'ont mal interprétée ! De plus, des étudiants ont prouvé la corrélation inverse dans la tâche 1(a) avec des formulations en langage naturel tellement longues et mal tournées que l'information devenait incompréhensible ou erronée.

Enfin, le dernier aspect de l'obstacle du formalisme concerne l'oubli des objets

traités. Autrement dit, des étudiants se perdent dans les symboles qu'ils utilisent et font des erreurs : c'est le cas dans la tâche 2 pour laquelle il est arrivé que les étudiants perdent de vue le côté matriciel et appliquent alors un "produit des éléments correspondants" un peu comme dans l'ensemble des réels.

Pour terminer, les difficultés dues aux changements dans les registres de représentation ont également été mises en avant. En effet, beaucoup d'étudiants ne savent pas choisir le bon registre dans le cadre des matrices. Par exemple, ils ont travaillé avec la représentation en tableau plutôt qu'avec un élément quelconque manipulé grâce aux indices dans la tâche 1(b) : ce choix malheureux leur a fait échouer l'exercice. De plus, certains étudiants ont montré le lien, proposé par Duval (1993), entre la compréhension d'une notion et la facilité de changer de registres : des erreurs telles que passer de $A^t = -A$ à $A_{ij} = -A_{ji}^t$ dans la tâche 1 (a). Le dernier problème, concernant l'incapacité à se retrancher dans d'anciens cadres plus familiers, a été confirmé par la tâche 1(c) où une minorité a pensé à bien justifier la simplification par un réel non nul.

En conclusion, tous les aspects des difficultés définies au chapitre 4 ont pu être vérifiés sur le calcul matriciel par l'analyse des exercices donnés en BAC1. Ainsi, la manière de travailler sur les matrices à l'université montre l'impact du formalisme sur certaines erreurs rencontrées. Celles-ci mettent bien en évidence la difficulté d'interpréter et de donner du sens au langage mathématique formel.

Chapitre 7

Conclusion générale

Une spécificité du travail est sa composante expérimentale à deux niveaux d'enseignement : le secondaire et la première année à l'université. Globalement, les expérimentations menées dans le cadre de ce mémoire ont tenu leur promesse en apportant des éléments de réponses au questionnement défini dans la problématique. En effet, rappelons que celui-ci avait pris deux directions suite aux lectures de travaux antérieurs : l'une vers l'université avec l'obstacle du formalisme et l'autre vers l'enseignement secondaire sur la dimension outil des matrices.

Pour l'enseignement secondaire, j'en ai conclu que les matrices n'étaient traitées que dans leur dimension objet, sans jamais être réutilisées dans un autre chapitre. En effet, mon expérience personnelle à deux dimensions (en tant qu'élève et en tant que future enseignante) ainsi que l'analyse du programme de la Communauté française avaient mis cette caractéristique en évidence. Dès lors, je me suis demandée s'il n'existait pas un problème pour lequel le calcul matriciel serait un outil de résolution optimal.

Pour répondre à cette première partie de la problématique, j'ai mis au point le scénario d'une leçon sur le moteur de recherches Google. Pour ce faire, j'ai adapté les informations du document de Rigo (2008) afin d'établir des temps de théorie pris en charge par l'enseignant et de recherches individuelles chez les élèves. Les parties théoriques ont dû être adaptées au niveau des élèves et des passages mathématiques difficiles ont été transformés en exercices. De plus, divers petits questionnements ont été introduits pour apporter de l'intuition. Tout ce travail a également été appuyé par des analyses a priori telles que définies au chapitre 3 pour que les sous-tâches présentées aux élèves soient pertinentes au sens qu'elles produisent des activités variées et non immédiates chez les élèves.

L'expérimentation de cette leçon auprès d'élèves de 6^e année en option 8 heures

de mathématiques par semaine a été très concluante. Elle a tout d'abord reflété mes appréhensions du contexte de travail sur l'enseignement de cette notion : la multitude de définitions et propriétés non réutilisées par la suite a eu pour conséquence que les connaissances sur les matrices n'étaient plus disponibles moins d'un an après leur enseignement. Dès lors, grâce à Google, le calcul matriciel a pu être réinvesti tout en étant proposé comme un outil de résolution. Les activités des élèves qui en ont découlé, détaillées au chapitre 5, permettent une conclusion positive car elles sont variées et d'un niveau plus proche de celui de l'université avec des exercices de démonstration.

Le cas de l'université concernait quant à lui l'obstacle du formalisme dans le cadre des matrices. Cette difficulté avait été mise en évidence dans les premiers travaux lus sur l'algèbre linéaire et constituait la seule piste pouvant être explorée pour le calcul matriciel. Dès lors, le questionnement concernait la forme prise par l'obstacle du formalisme dans le cas du calcul matriciel et son lien avec les erreurs observées chez les étudiants. De plus, celui-ci a été complété par les nouvelles pratiques attendues déterminées par Robert (1998) pouvant elles aussi affecter le travail des étudiants.

Le moyen choisi pour traiter cette seconde partie est l'analyse de questions provenant de tests du cours de Mathématiques élémentaires. Celles-ci ont été préalablement analysées à partir des outils d'analyse des contenus et les réponses des étudiants ont été dépouillées pour être confrontées aux difficultés présumées du chapitre 3. Le but de cette analyse étant de justifier les erreurs des étudiants par le manque de sens qu'ils donnent au formalisme des matrices ou les nouvelles pratiques attendues à l'université.

L'analyse des productions des étudiants a véritablement permis d'illustrer l'obstacle du formalisme sous toutes ses formes ainsi que les nouvelles pratiques attendues. En effet, le bilan du chapitre 6 a pu confirmer chaque difficulté abordée dans la partie théorique avec un exemple retrouvé dans les copies d'étudiants. Autrement dit, cette expérimentation a confirmé que le manque de sens donné au formalisme des matrices amenait des erreurs. Dès lors, les formes prises par l'obstacle du formalisme précisé au contexte matriciel ont pu être caractérisées. Tout d'abord, lorsque les étudiants ne reconnaissent pas la véritable signification d'une formule en termes d'éléments d'une matrice, ils se lancent dans d'interminables calculs et commettent des erreurs comme ça a été le cas avec le double symbole sommatoire correspondant à la somme des éléments d'une matrice antisymétrique. Dans le même ordre d'idées, les étudiants peu sûrs ont tendance à aligner des formules qu'ils connaissent mais en ne les comprenant pas, ce qui a

pour conséquence la production d'un discours incohérent et vide de sens. Ensuite, il s'est révélé que l'utilisation des indices des éléments d'une matrice était difficile : beaucoup d'étudiants les manipulent sans les associer à la position dans la matrice. Du coup, les conséquences sont nombreuses : i et j sont vus comme des constantes et au lieu de les faire varier en fonction de la position de l'élément dans la matrice, les changements de registres sont mal effectués ($A^t = -A$ devient $A_{ji}^t = -A_{ij}$) et des confusions dans les différentes catégories d'objets apparaissent (la trace est vue comme une matrice).

En conclusion, ce mémoire a permis une analyse du calcul matriciel dans sa double dimension outil-objet en proposant une application de cette notion grâce à Google et en déterminant les difficultés dues au formalisme accompagnant les matrices lorsqu'elles sont utilisées en tant qu'objet à l'université. En tant que future enseignante, cette analyse m'a apporté des éléments intéressants et pouvant être réinvestis. Bien sûr, on ne peut pas contourner le programme et l'enseignement du calcul matriciel ne peut pas négliger les aspects calculatoires. Toutefois, ce travail montre la possibilité de proposer et gérer en classe des tâches plus complexes et surtout plus appliquées. De plus, je sais qu'il y a une réflexion à mener dans le secondaire sur le sens des notations et des symboles.

Bibliographie

CORRIVEAU C. (2007), *Arrimage secondaire-collégial : démonstration et formalisme*, Université du Québec, mémoire de DEA.

DORIER J.-L. (dir.)(1997), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. La Pensée Sauvage. Grenoble, France.

DOUADY R. (1994), *Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir : une chronique en calcul mental, un projet en algèbre à l'articulation collège-seconde*, Repères-Irem n°15

DUVAL R. (1993), *Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, pp. 37-65.

FROGER J.-F. (2003), Éditions DésIris, *Structure de la connaissance*, France.

GRENIER-BOLEY N. (2009), *Un exemple d'étude de gestion des déroulements en travaux dirigés de mathématiques à l'université*. Cahier de Didirem 59, Université de Paris 7.

ROBERT A. (1998), *Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université*, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 18, n°2, pp. 139-190.

VANDEBROUCK F. (2008)(dir.), Collection Formation, *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, France.

VERGNAUD G. (1990), *La théorie des champs conceptuels*, Recherches en Didactique des Mathématiques.

CORRIVEAU C., TANGUAY D. (2007), *Formalisme accru du secondaire et collégial : les cours d'algèbre linéaire comme indicateurs*, Bulletin AMQ vol. XLVII n°1, p6-24.

ROUCHIER A., BLOCH I. (dir.)(2008), La Pensée Sauvage, *Perspectives en didactique des mathématiques, cours de la XII^{ème} école d'été de didactique des mathématiques. Sainte livrade (Lot et Garonne) - du 18 au 26 août 2005*, France.

VIOLA F., CHIOCCA C.-M. (2006), *Les difficultés d'étudiants de l'université sur la notion de matrice à l'analyse des manuels des élèves de lycée*, Actes du colloque emf 2006, Université de Sherbrooke, Canada.

BLOCH I., KIENTEGA G., TANGUAY D. (2006), *Colloque EMF 2006, synthèse du thème 6*.

LÉVI M.-C., CHAPPET-PARÈS M., ROBERT A. (2010), *Enseignants de mathématiques du secondaire : stages et formation professionnelle en master ?* Cahier de Didirem 13, Université de Paris 7.

PARIÈS M., ROBERT A., ROGALSKI J. (2007), *Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants de mathématiques expérimentés du second degré*, Springer Science, Paris.

LANGVILLE A., MEYER C. (2006), *Google's PageRank and Beyond : The Science of Search Engine Rankings*, Princeton University Press.

RIGO M., *Google, graphes et matrices... La matrice cachée de Google*, université de Liège, 2008

[http ://www.discmath.ulg.ac.be/papers/printemps-google.pdf](http://www.discmath.ulg.ac.be/papers/printemps-google.pdf)

Annexes

Annexe I : programme de la Communauté française

Troisième degré de transition – Cinquième année – Cours à 6 périodes hebdomadaires

2. CALCUL MATRICIEL, DETERMINANTS, SYSTEMES D'EQUATIONS DU PREMIER DEGRE.

Compétences à atteindre	Matières	Conseils méthodologiques
<p>Effectuer des calculs où interviennent des matrices.</p> <p>Utiliser une matrice pour décrire une transformation élémentaire et pour modéliser une situation.</p> <p>Utiliser une calculatrice ou un logiciel pour calculer un produit de matrices, une matrice inverse et pour résoudre un système d'équations linéaires.</p>	<p>Calcul matriciel.</p> <p>Définitions :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ transposée d'une matrice, ▪ somme de deux matrices, ▪ opposée d'une matrice, ▪ produit d'une matrice par un nombre réel, ▪ produit de deux matrices, ▪ inverse d'une matrice. <p>Déterminants :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Définition, ▪ Calcul, ▪ Règle des mineurs, ▪ Propriétés. 	<p>Les opérations classiques seront introduites à partir de la géométrie et de contextes que l'on modélise (économie, démographie, probabilités, ...).</p> <p>Dès que la taille des matrices dépassera 3, on aura recours à une calculatrice ou à un ordinateur.</p> <p>Le but de l'étude des déterminants est de les utiliser pour résoudre et discuter certains systèmes.</p>
<p>Utiliser les principes d'équivalence, les matrices, les déterminants pour résoudre des systèmes d'équations linéaires.</p> <p>Distinguer les systèmes ayant une infinité de solutions, une solution ou aucune solution.</p>	<p>Résolution de systèmes $m \times n$.</p> <p>Unicité de la solution d'un système de Cramer $n \times n$.</p> <p>Discussion de systèmes $n \times n$ à 1 paramètre ($n \leq 3$).</p>	<p>Dans le cas d'un système rectangulaire m et n ne dépasseront pas 3. Dans le cas d'un système carré, si m est supérieur à 3 on aura recours à une calculatrice ou à un ordinateur.</p> <p>La discussion d'un système d'équations sera interprétée géométriquement si m et n ne dépassent pas 3.</p>

Annexe II : Google et les probabilités

À la suite des explications de base sur le fonctionnement de Google au chapitre 5, section 1, il est possible de faire une interprétation probabiliste. Elle est proposée succinctement ici en utilisant la même matrice G définie au chapitre 5.

En fait, nous pouvons imaginer qu'un surfeur passe de page en page à chaque unité de temps : s'il se trouve sur une page p_i , il cliquera au hasard sur un lien le dirigeant vers une autre page p_j . Ce clic s'effectue avec une certaine probabilité notée $\mathbb{P}(p_i \rightarrow p_j)$. Nous pouvons alors considérer que $G_{ij} = \mathbb{P}(p_j \rightarrow p_i)$ étant donné que la somme des éléments de chaque colonne vaut 1. Nous avons dès lors bien, pour toute page p_i , $\mathbb{P}(p_i \rightarrow p_1) + \mathbb{P}(p_i \rightarrow p_2) + \dots + \mathbb{P}(p_i \rightarrow p_n) = 1$.

Au vu de la construction de la matrice G à l'aide de $\alpha = 0,85$, deux choix s'offrent au surfeur se trouvant sur une page :

- avec une probabilité de 85%, il choisit un des liens présents sur sa page.
- avec une probabilité de 15%, il est redirigé vers une page quelconque du web.

Remarquons que le surfeur prend ses décisions au hasard mais a néanmoins plus de chance de cliquer sur un lien présent sur la page visitée.

Sous ces conditions, les puissances successives de G contiennent les probabilités de transitions entre pages après un certain nombre de clics. Autrement dit, la matrice G^n contient les probabilités d'arriver en une page après n clics. De plus, Perron Frobenius nous assure l'existence d'une matrice limite et celle-ci contiendra, intuitivement, les fréquences d'apparitions des pages web.