Algèbre II, août 2019

Documents autorisés.

Exercice 1. Soit $\omega = e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \quad \in GL_2(\mathbb{C}).$$

Ces matrices vérifient la relation $ABA^{-1} = B^{-1}$. Soit $G = \langle A\,, B\rangle$.

1. Déterminer l'ordre de G. Le groupe G est-il cyclique ?
2. Déterminer les p-Sylow de G pour $p = 3$ et $p = 2$.
3. Montrer que G contient un unique sous-groupe d'ordre 6.
4. Montrer que tous les sous-groupes propres de G sont cycliques.

Exercice 2. Soit G un groupe d'ordre 70.

1. Montrer que G contient un unique sous-groupe d'ordre 5 (respectivement 7).
2. Montrer que G contient un unique sous-groupe d'ordre 35.
3. Montrer que G est cyclique ssi il contient un unique élément d'ordre 2.

Exercice 3. Soient p un nombre premier, G un groupe fini, et P un p-Sylow de G. On suppose que $|G| = |P|\,|Z(G)|$.

1. Montrer que $G = PZ(G)$.
2. Montrer que P est l'unique p-Sylow de G.
3. Montrer que $G \simeq P \times Z(G)$.
4. Montrer que G est abélien d'ordre premier à p.