Introduction à la géométrie algébrique
Janvier 2009

Durée : 4 heures. Documents autorisés.

**Exercice 1.** Soient les polynômes $P(X,Y) = Y^2 - X^3Y + XY - 2Y + X^3 - X + 2$ et $Q(X,Y) = Y^2 - X^3Y + XY + 1 \in \mathbb{Q}[X,Y]$.

1. Montrer que $X^3 - X + 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
2. Montrer que $P(X,Y)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X,Y]$.
3. Montrer que l'application $\mathbb{Q}[X,Y] \to \mathbb{Q}[X,Y]$ donnée par $R(X,Y) \mapsto R(X,Y+1)$ est un automorphisme d'anneau.
4. Montrer que $Q(X,Y)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X,Y]$.
5. Étudier l'irréductibilité de $P(X,Y) - Q(X,Y)$ dans $\mathbb{Q}[X,Y]$.

**Exercice 2.**

1. Soient $A$ un anneau commutatif et $I, J$ des idéaux de $A$.
   (a) Montrer que $(A/I)/\big((I+J)/I\big) \simeq A/(I+J)$.
   (b) On suppose que $J = (a)$ avec $a \in A$. Montrer que $(I+J)/I = (a \bmod I)$.

Soit $\mathbb{Z}[i]$ l'anneau des entiers de Gauss.

2. Montrer que $\mathbb{Z}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{Z}[i]$.
3. Soient $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier et $p\mathbb{Z}[i]$ l'idéal engengré par $p$ dans $\mathbb{Z}[i]$.
   (a) Montrer que $\mathbb{Z}[X]/(p\,,X^2+1) \simeq \mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i]$.
   (b) Montrer que $\mathbb{Z}[X]/(p\,,X^2+1) \simeq \mathbb{F}_p[X]/(X^2+1)$.
4. Décomposer $X^2+1$ en produit d'éléments irréductibles dans $\mathbb{F}_3[X]$ et dans $\mathbb{F}_5[X]$.
5. (a) Montrer que $\mathbb{Z}[i]/3\mathbb{Z}[i]$ est un corps.
   (b) Montrer que $\mathbb{Z}[i]/5\mathbb{Z}[i] \simeq \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$.

**Exercice 3.** Soient $A$ un anneau commutatif et $\mathrm{Nil}(A) = \{a \in A \mid \exists n \geq 1 \text{ tel que } a^n = 0\}$ l'ensemble des éléments nilpotents de $A$.

1. (a) Soient $B$ un anneau intègre et $f : A \to B$ un morphisme d'anneau. Montrer que $\mathrm{Nil}(A) \subseteq \mathrm{Ker}\, f$.
   (b) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $A$. Montrer que $\mathrm{Nil}(A) \subseteq \mathfrak{p}$.

On suppose que l'anneau $A$ n'est pas nul.

2. Montrer que $\mathrm{Nil}(A) \neq A$.
3. Soient $s \in A \setminus \mathrm{Nil}(A)$ et $S = \{s^n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$.
   (a) Montrer que $0 \notin S$.
   (b) Montrer que l'anneau $S^{-1}A$ n'est pas nul.
4. (a) Montrer que $S^{-1}A$ contient un idéal premier $\mathfrak{q}$.
   (b) Soit $\varphi : A \to S^{-1}A$, $a \mapsto \frac{a}{1}$. Montrer que $s \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$.
5. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des idéaux premiers de $A$. Montrer que

$$\mathrm{Nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}} \mathfrak{p}.$$