Algèbre linéaire et géométrie II, août 2019

Documents autorisés.

Exercice 1. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans une base $B = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme minimal de f.
2. Montrer que f est combinaison linéaire de deux projections commutant entre elles.
3. Déterminer les sous-espaces vectoriels non nuls V de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(V) = V$.

Exercice 2. Soit K un corps. Pour $a \in K$ soit

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(K).$$

1. Pour quels $a \in K$ la matrice M_a est-elle jordanisable ? Diagonalisable ?
2. Déterminer une matrice de Jordan conjuguée à M_a lorsqu'il y a lieu, ainsi que le polynôme minimal de M_a.
3. Combien y a-t-il de classes de conjugaison dans l'ensemble de matrices $\{M_a\,;\, a \in K\}$?

Exercice 3. Soit E un espace euclidien. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle f^t(u), f^t(v)\rangle$ pour tous $u, v \in E$.

1. Montrer que $f \circ f^t = f^t \circ f$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^{\perp}$.
3. Montrer que si f est nilpotent alors $f = 0$.