Algèbre II, juin 2016

Documents autorisés.

**Exercice 1.** Soit $G$ un groupe fini. Soient $N, H$ des sous-groupes de $G$ avec $N \lhd G$. Un tel couple de sous-groupes $(N, H)$ satisfait la propriété (S) si le morphisme $H \to G/N$, $h \mapsto hN$ est bijectif.

1. Montrer que si $(N, H)$ satisfait (S) alors $G = NH$.
2. Montrer que si $(N, H)$ satisfait (S) et $H \lhd G$ alors $G \simeq N \times H$.
3. Soit $N \lhd G$ tel que $G/N$ est un $p$-groupe et $p$ ne divise pas $|N|$. Montrer qu'il existe un sous-groupe $H$ de $G$ tel que $(N, H)$ satisfait (S).
4. Déterminer tous les couples $(N, H)$ satisfaisant (S) pour les groupes suivants :
   (a) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
   (b) $A_4$
   (c) $Q_8$.

**Exercice 2.** Soit $p$ un nombre premier. Soit le sous-groupe de $GL_3(\mathbb{F}_p)$

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ a, b, c \in \mathbb{F}_p \right\}.$$

1. Déterminer $Z(P)$.
2. Déterminer $D(P)$.
3. Combien y a-t-il de morphismes $P \to \mathbb{C}^\times$ ?

**Exercice 3.** Soient $p$ un nombre premier et $G$ un groupe fini. Soient $P, H$ des sous-groupes de $G$ tels que $P$ est un $p$-groupe, $P \lhd G$, et $G = PH$. Soit $Q$ un $p$-Sylow de $H$.

1. Montrer qu'il existe $x \in H$ tel que $H \cap P \subseteq xQx^{-1}$.
2. Montrer que $H \cap P = Q \cap P$.
3. Montrer que $PQ$ est un $p$-Sylow de $G$.
4. Montrer que si $H \lhd G$ alors $S_p(G) = \{PQ\,;\, Q \in S_p(H)\}$.