Algèbre II, juin 2017

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient $\alpha, \beta \in GL_2(\mathbb{F}_3)$ avec

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces éléments satisfont les relations $\beta^{-1} = -\beta^3$ et $\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta^3$. Soit $G = \langle \alpha, \beta \rangle$.

1. Déterminer l'ordre de G.
2. Déterminer $Z_G(\beta)$ et $Z(G)$.
3. Déterminer $D(G)$.

Exercice 2. Soit le groupe dihédral D_6.

1. Montrer que D_6 contient un unique sous-groupe N d'ordre 3.
2. Montrer que D_6 contient un sous-groupe H isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Combien y a-t-il de tels sous-groupes dans D_6 ?
3. Montrer que $H \simeq D_6/N$.
4. Combien y a-t-il de morphismes de groupe $D_6 \to \mathbb{F}_5^\times$?

Exercice 3. Soit p un nombre premier. Soit G un groupe fini tel que $D(G)$ est un p-groupe. Soit P un p-Sylow de G.

1. Montrer que $D(G) \subseteq P$.
2. Montrer que $P/D(G)$ est un p-Sylow de $G/D(G)$.
3. Montrer que l'application $S_p(G) \to S_p(G/D(G))$, $P \mapsto P/D(G)$ est injective.
4. Combien y a-t-il de p-Sylow dans G ?