

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient $x, y \in GL_2(\mathbb{F}_7)$ avec

$$x = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces éléments satisfont la relation $yx = x^{-1}y$. Soit $G = \langle x, y \rangle$.

1. Déterminer l'ordre de G .
2. Déterminer tous les sous-groupes d'ordre 3 et tous les sous-groupes d'ordre 4 de G .
3. Déterminer $Z(G)$ et $D(G)$.
4. Existe-t-il un morphisme surjectif $G \rightarrow \mathbb{F}_5^\times$? Un morphisme surjectif $G \rightarrow (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$?

Exercice 2. Soient p un nombre premier et G un p -groupe non trivial.

1. Montrer que G contient un sous-groupe H tel que $|H| = p$ et $H \triangleleft G$.
2. Soit H un groupe tel que $|H| = p$. Montrer que $\text{Aut}_{\text{grp}}(H) \simeq \mathbb{F}_p^\times$.
3. Soit H un sous-groupe de G tel que $|H| = p$ et $H \triangleleft G$. Montrer que $H \subseteq Z(G)$.
4. Combien y a-t-il de sous-groupes normaux d'ordre 2 dans $Q_8 \times D_4$?

Exercice 3. Soit G un groupe fini tel que $G/Z(G)$ est abélien. Soient p un nombre premier et P un p -Sylow de G .

1. Montrer que $PZ(G)/Z(G)$ est l'unique p -Sylow de $G/Z(G)$.
2. Montrer que P est l'unique p -Sylow de $PZ(G)$.
3. Montrer que P est l'unique p -Sylow de G .
4. Montrer que G contient un sous-groupe d'ordre d pour tout diviseur d de $|G|$.