Algèbre II, août 2016

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient $\sigma = (1\,3) \in S_4$, $\tau = (1\,2\,3\,4) \in S_4$, et $G = \langle \sigma, \tau \rangle$.

1. Déterminer l'ordre de G.
2. Déterminer $Z(G)$ et $D(G)$.
3. Combien y a-t-il de morphismes $G \to \mathbb{C}^\times$?

Exercice 2. Soit p un nombre premier. Soit G un p-groupe contenant un unique sous-groupe H d'indice p.

1. Montrer que $D(G) \subseteq H$.
2. Soient $N \lhd G$ tel que $N \neq G$ et $\pi : G \to G/N$, $x \mapsto xN$.
   (a) Montrer que G/N contient un sous-groupe Γ d'indice p.
   (b) Montrer que $\pi^{-1}(\Gamma) = H$.
   (c) Montrer que H/N est l'unique sous-groupe d'indice p de G/N.
3. Montrer que si G est abélien alors G est cyclique.
4. Montrer qu'il existe $x \in G$ tel que $G = \langle x \rangle D(G)$ et $H = \langle x^p \rangle D(G)$.

Exercice 3. Soient p un nombre premier et G un groupe fini dont tous les p-Sylow ont le même normalisateur :

$$\forall\, P, Q \in S_p(G),\ N_G(P) = N_G(Q).$$

Soit P un p-Sylow de G.

1. Montrer que P est l'unique p-Sylow de $N_G(P)$.
2. Montrer que $N_G(P) \lhd G$.
3. Montrer que P est l'unique p-Sylow de G.