Algèbre II, août 2017

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient $\sigma, \tau \in S_5$ avec $\sigma = (1\,2)$ et $\tau = (1\,2\,3)(4\,5)$. Soit $G = \langle \sigma, \tau \rangle$.

1. Déterminer l'ordre de G.
2. Déterminer $D(G)$ et $Z(G)$.
3. Déterminer les p-Sylow de G pour $p = 2$ et $p = 3$.

Exercice 2. Soient G un groupe fini et $\pi : G \to G/Z(G)$ le morphisme de projection. Soit

$$Z_1(G) = \{x \in G \mid \forall\, y \in G,\ xyx^{-1}y^{-1} \in Z(G)\}.$$

1. Montrer que $Z_1(G) = \pi^{-1}(Z(G/Z(G)))$ et que $Z_1(G)/Z(G) \simeq Z(G/Z(G))$.
2. Soit G un p-groupe. Montrer que $Z_1(G) = Z(G)$ si et seulement si G est abélien.
3. Déterminer $Z_1(Q_8)$ et $Z_1(D_8)$.

Exercice 3. Soit p un nombre premier. Soient G un groupe fini et

$$H = \langle\, x \in G \mid \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \operatorname{ord}(x) = p^k \,\rangle.$$

1. Montrer que H est engendré par la réunion des p-Sylow de G.
2. Montrer que $S_p(G) = S_p(H)$.
3. Soit P un p-Sylow de G. Montrer que $G = HN_G(P)$.