Algèbre II, août 2018

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient $\sigma, \tau, \rho \in S_6$ avec $\sigma = (2\,4)$, $\tau = (1\,2\,3\,4)$, $\rho = (5\,6)$, et $G = \langle \sigma, \tau, \rho \rangle$.

1. Montrer que G est un 2-Sylow de S_6.
2. Déterminer $Z(G)$.
3. Déterminer $D(G)$.
4. Existe-t-il un morphisme surjectif $G \twoheadrightarrow \mathbb{F}_5^\times$?

Exercice 2. Soit G un groupe d'ordre 12 ayant un unique 2-Sylow P, qui est cyclique. Soit Q un 3-Sylow de G.

1. Montrer que Q agit sur P par conjugaison.
2. Déterminer l'ordre de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{grp}}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.
3. Montrer que G est cyclique.
4. Le résultat subsiste-t-il si l'on ne suppose plus P cyclique ?

Exercice 3. Soient G un groupe fini et H, N des sous-groupes de G tels que $H \lhd N$ et $N \lhd G$. Soit p un nombre premier.

1. Donner un exemple où H n'est pas normal dans G.
2. Montrer que si H est un p-Sylow de G alors H est l'unique p-Sylow de N.
3. Montrer que si H est un p-Sylow de G alors $H \lhd G$.
4. Soit P un p-Sylow de G. Montrer que $N_G(P) \lhd G$ ssi $N_G(P) = G$.