Algèbre III, juin 2016.

Documents autorisés.

Exercice 1. Déterminer tous les sous-corps de $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$ et donner un élément primitif pour chacun. Lesquels sont galoisiens sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 2. Soient $F = \mathbb{Q}(\zeta_5)$ et $K = \mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2})$. Les groupes de Galois ainsi que les treillis des sous-corps de $F/\mathbb{Q}$ et de $K/\mathbb{Q}$ sont supposés connus. Soit $L = FK$.

1. Déterminer les sous-corps de L de degré 8 sur $\mathbb{Q}$ et donner un élément primitif pour chacun.
2. Même question avec les sous-corps de L de degré 3 sur $\mathbb{Q}$.

Soient K un corps de caractéristique 0 et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K.

Exercice 3. Soit $P(X) \in K[X]$ un polynôme irréductible de degré n. Soit L le corps de décomposition de $P(X)$ sur K. Soit $G = G(L/K)$ le groupe de Galois de L/K.

1. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de S_n.
2. On suppose que $n = 3$. Montrer que $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ou $G \simeq S_3$.
3. Donner un exemple d'un tel corps de décomposition L avec $K = \mathbb{Q}$, $n = 3$, et $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Soient L/K une extension finie galoisienne et $K \subseteq F \subseteq L$ un sous-corps. Soient $G = G(L/K)$ et $H = G(L/F)$.

1. Montrer que la restriction à F induit une bijection $G/H \simeq \mathrm{Hom}_K(F, \overline{K})$.
2. Soit $\alpha \in L$ tel que $L = K(\alpha)$. Montrer que $P_{\alpha,K}(X) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}_K(F,\overline{K})} \sigma(P_{\alpha,F})(X)$.
3. Déterminer le polynôme minimal de $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$.