Algèbre III, août 2016.

Documents autorisés.

Exercice 1. Soit $K = \mathbb{Q}(\zeta_7\sqrt{2})$.

1. Montrer que l'extension $K/\mathbb{Q}$ est galoisienne.
2. Montrer que $G(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
3. Combien y a-t-il de sous-corps F de K tels que $[F : \mathbb{Q}] = 2$?

Exercice 2. Soit K la clôture galoisienne de $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{7}, \sqrt[7]{5})$ sur $\mathbb{Q}$.

1. Déterminer $[K : \mathbb{Q}]$.
2. Combien y a-t-il de sous-corps F de K tels que $[F : \mathbb{Q}] = 120$?

Exercice 3. Soit L/K une extension finie galoisienne contenant un seul sous-corps strict $K \subsetneq F \subsetneq L$.

1. Montrer que le groupe de Galois de L/K est cyclique.
2. Montrer que $[L : K] = p^2$ où p est un nombre premier.
3. Donner un exemple d'une telle extension avec $K = \mathbb{Q}$.

Exercice 4. Soit L/K une extension finie galoisienne. Soit

$$F = \{\alpha \in L \mid \forall\, \sigma, \tau \in G(L/K),\ \sigma\tau(\alpha) = \tau\sigma(\alpha)\}.$$

Montrer que F est la plus grande extension galoisienne de K contenue dans L dont le groupe de Galois est abélien.