Algèbre linéaire et géométrie I
Janvier 2016

Documents interdits.

Exercice 1. Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\} \quad \text{et} \quad W = \mathbb{R}(1, 0, 1).$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.
2. Soit p la projection sur V parallèlement à W. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $p(a, 0, 1) = p(1, 0, a)$.

Exercice 2. Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (y + z,\ x + z). \end{aligned}$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. L'application f est-elle injective ?
2. Montrer que f est surjective.
3. Déterminer $V \cap \mathrm{Ker}(f)$.
4. Montrer que $V = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle$.
5. Montrer que l'application $f_{|V} : V \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto f(v)$, est bijective.

Exercice 3. Soient E un K-espace vectoriel, V, W des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = V \oplus W$, et $p : E \to E$ la projection sur V parallèlement à W. Soit $f : E \to E$ une application linéaire.

1. Montrer que $p \circ f = f$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subseteq V$.
2. Montrer que $f \circ p = f$ si et seulement si $W \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.
3. On suppose que V n'est pas nul. Donner deux exemples d'application linéaire $f : E \to E$ telle que $p \circ f = f \circ p = f$.