Algèbre linéaire et géométrie I
Mars 2016

Documents interdits.

Exercice 1. Soit l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$(x, y, z) \longmapsto (x - z,\ x - y + z,\ y - 2z,\ x + y - 3z).$$

Soient $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z - t = 0\}$ et $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y - t = 0\}$.

1. Déterminer $\dim V$ et $\dim W$.
2. Déterminer $\dim(V + W)$ et $\dim(V \cap W)$.
3. Déterminer $\dim \operatorname{Ker}(f)$ et $\dim \operatorname{Im}(f)$.
4. Montrer que $\operatorname{Im}(f) = V \cap W$.

Exercice 2.

1. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $f : E \to E$ une application linéaire, et V un sous-espace vectoriel de E tel que $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus V$. Montrer que si $(v_1, \dots, v_m)$ est une base de V alors $(f(v_1), \dots, f(v_m))$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (0, x, y)$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ soit $V_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + az = 0\}$.

2. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f) \oplus V_a$.
3. Déterminer la dimension de $f(V_a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer les $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(V_a) = f(V_b)$.

Exercice 3. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f, g : E \to E$ des applications linéaires telles que $f + g = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g) = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g) = E$.
2. Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Ker}(g)) + \dim(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g)) = \dim E$.
3. Montrer que $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$ si et seulement si $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Ker}(g)$.
4. Montrer que si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont nulles alors $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$.