Algèbre linéaire et géométrie I
Juin 2016, section mathématique

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour $a \in \mathbb{R}$ soit $f_a \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ dont la matrice dans la base B est

$$M_B(f_a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $v_2 = e_1 - e_2$, $v_3 = e_2 - e_3$, et $C = (v_1, v_2, v_3)$.

1. Montrer que C est une base de E et déterminer $M_C(f_a)$.
2. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que f_a est surjectif.
3. Déterminer les $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $E = \mathrm{Ker}(f_a) \oplus \mathrm{Ker}(f_b)$.

Exercice 2. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$. Soit $V \subseteq E$ un sous-espace vectoriel tel que $E = V \oplus f(V)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Im}(f) \cap V) \oplus f(V)$.
2. Montrer que $\dim V = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) \cap V$.
3. Pour $a \in \mathbb{R}$ soit $V_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + ay - z = 0\}$. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{R}^3 = V_a \oplus f(V_a)$.

Exercice 3. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient V, W des sous-espaces tels que $E = V \oplus W$, p la projection sur V parallèlement à W, et q la projection sur W parallèlement à V. Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} \pi : \mathrm{End}_K(E) &\longrightarrow \mathrm{End}_K(E) \\ f &\longmapsto q \circ f \circ p. \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(\pi) = \{f \in \mathrm{End}_K(E) \mid f(V) \subseteq V\}$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(\pi) = \{g \in \mathrm{End}_K(E) \mid \mathrm{Im}(g) \subseteq W \subseteq \mathrm{Ker}(g)\}$.
3. Pour tout $g \in \mathrm{Im}(\pi)$ soit l'application linéaire $\rho(g) : V \to W$, $v \mapsto g(v)$. Montrer que l'application $\rho : \mathrm{Im}(\pi) \to \mathrm{Hom}_K(V, W)$, $g \mapsto \rho(g)$ est bijective.
4. Déterminer $\dim \mathrm{Ker}(\pi)$ en fonction de $\dim E$ et $\dim V$.