Algèbre linéaire et géométrie I
Août 2016, section mathématique

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient la base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $a \in \mathbb{R}$ soit $V_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + ay + z = 0\}$.

1. Déterminer $\dim \mathrm{Ker}(f)$ et $\dim \mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer $\dim V_a$ et $\dim f(V_a)$.
3. Déterminer $\{a \in \mathbb{R} \mid f(V_a) = \mathrm{Im}(f)\}$.
4. Déterminer $\{a \in \mathbb{R} \mid \mathbb{R}^3 = V_a \oplus f(V_a)\}$.

Exercice 2. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$.

1. Montrer que $\dim \mathrm{Im}(f \circ f) = \dim \mathrm{Im}(f) - \dim \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(f \circ f) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.
3. On suppose que $\dim E = 3$. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E, et pour $a \in K$ soit $f_a \in \mathrm{End}_K(E)$ tel que
$$M_B(f_a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que $\mathrm{Ker}(f_a \circ f_a) = \mathrm{Ker}(f_a)$ si et seulement si f_a est surjectif.

Exercice 3. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient V, W des sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim V = \dim W$ et $E = V \oplus W$.

1. Montrer qu'il existe une application linéaire bijective $f : V \xrightarrow{\sim} W$.
2. Montrer que $U = \{f(v) - v \ ; \ v \in V\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer que $\dim U = \dim V$.
4. Montrer que $E = U \oplus V = U \oplus W$.