Algèbre linéaire et géométrie I
Juin 2016, section physique

Documents autorisés.

Exercice 1. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,0)$, $v_3 = (0,1,-1)$, et $C = (v_1, v_2, v_3)$.

1. Montrer que C est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $M_C(f)$ et $M_C(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

Exercice 2. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$. Soit $V \subseteq E$ un sous-espace vectoriel tel que $E = V \oplus f(V)$.

1. Montrer que $V = \{0_E\}$ ssi $E = \{0_E\}$ et que $V = E$ ssi $f = 0$.
2. On suppose que $f \neq 0$ et $\dim E = 3$. Montrer que $\dim V = 2$.
3. Pour $a \in \mathbb{R}$ soit $V_a = \langle\, (1,0,0), (a,1,0), (1,1,a) \,\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{R}^3 = V_a \oplus f(V_a)$.

Exercice 3. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient V, W des sous-espaces tels que $E = V \oplus W$, p la projection sur V parallèlement à W, et q la projection sur W parallèlement à V. Soit $f \in \mathrm{End}_K(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(q \circ f \circ p) \subseteq W \subseteq \mathrm{Ker}(q \circ f \circ p)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(q \circ f \circ p) = (f^{-1}(V) \cap V) \oplus W$.
3. Montrer que $\dim \mathrm{Im}(q \circ f \circ p) = \dim V - \dim f^{-1}(V) \cap V$.
4. On suppose que $\dim E = 4$. Soit $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E. Soient $V = \langle e_1, e_2 \rangle$, $W = \langle e_3, e_4 \rangle$, et $f \in \mathrm{End}_K(E)$ dont la matrice dans la base B est

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que $\mathrm{Im}(q \circ f \circ p) = \mathrm{Ker}(q \circ f \circ p)$.