Algèbre linéaire et géométrie I
Août 2016, section physique

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient la base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $a \in \mathbb{R}$ soit $V_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + ay + z = 0\}$.

1. Déterminer $\dim \mathrm{Ker}(f)$ et $\dim \mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer $\dim V_a$ et $\dim f(V_a)$.
3. Déterminer $\{a \in \mathbb{R} \mid f(V_a) = \mathrm{Im}(f)\}$.
4. Déterminer $\{a \in \mathbb{R} \mid \mathbb{R}^3 = V_a \oplus f(V_a)\}$.

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour $a \in \mathbb{R}$ soit $f_a \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que

$$M_B(f_a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que f_a est injectif.
2. Déterminer $M_B(f_0 \circ f_0)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f_a \circ f_a) = \mathrm{Ker}(f_a)$ si et seulement si f_a est surjectif.

Exercice 3. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_K(E)$. Soient $V \subseteq E$ un sous-espace vectoriel tel que $E = V \oplus \mathrm{Im}(f)$ et p la projection sur V parallèlement à $\mathrm{Im}(f)$.

1. Montrer que $\dim V = \dim \mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer qu'il existe une application linéaire bijective $\varphi : V \to \mathrm{Ker}(f)$.
3. Soit $g : E \to E$, $u \mapsto \varphi(p(u))$. Montrer que $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f)$.