Algèbre linéaire et géométrie II, janvier 2016

Documents autorisés.

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4. Pour $a \in \mathbb{R}$ soit $f_a \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ l'endomorphisme dont la matrice dans une base B de E est

$$M_B(f_a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f_a est jordanisable pour tout $a \in \mathbb{R}$ et déterminer la dimension de ses sous-espaces caractéristiques.
2. Déterminer pour chaque $\lambda \in \mathrm{Spec}(f_a)$ le nombre de blocs de Jordan en λ intervenant dans sa matrice jordanisée.
3. Déterminer la matrice jordanisée de f_a ainsi que son polynôme minimal. Pour quels $a \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme f_a est-il diagonalisable ?

Exercice 2. Soient K un corps contenant $\mathbb{Q}$ et E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathrm{End}_K(E)$ tel que $P_f(X)$ est scindé dans $K[X]$. Soit $k \geq 1$ un entier.

1. Pour $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$ soit f_λ la restriction de f à son sous-espace caractéristique associé à λ. Montrer que f^k est diagonalisable si et seulement si $f_\lambda^k = \lambda^k \,\mathrm{Id}$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$.
2. Montrer que $M_f(X)$ divise $M_{f^k}(X^k)$.
3. Soit $a \in K^\times$. Montrer que a est racine simple de $X^k - a^k$.
4. Montrer qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que f^k est diagonalisable si et seulement si toutes les racines non nulles de $M_f(X)$ sont simples.

Exercice 3. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique définie. Soit $g \in \mathrm{End}_K(E)$ tel qu'il existe $a \in K$ tel que $g^t = ag$.

1. Montrer que $g = 0$ ou $a = \pm 1$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g)$.
3. Montrer que g est nilpotent si et seulement si $g = 0$.
4. Soit $f \in \mathrm{End}_K(E)$. Montrer que $f^t - f$ est nilpotent si et seulement si f est symétrique.