Algèbre linéaire et géométrie II, août 2016

Documents autorisés.

Exercice 1. Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soient $f, g \in \operatorname{End}_K(E)$ tels que f est diagonalisable, g est nilpotent, et $f \circ g = g \circ f$. Soit $\lambda \in K$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(f + g - \lambda \operatorname{Id}_E) \subseteq \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^n$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^n = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker}(f + g - \lambda \operatorname{Id}_E) \subseteq \operatorname{Ker} g$.
4. Montrer que $f + g$ est diagonalisable si et seulement si $g = 0$.

Exercice 2. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \operatorname{End}_K(E)$. Soient $M(X)$ le polynôme minimal de f et $P, Q \in K[X]$ des polynômes unitaires tels que $M = PQ$. Soient les endomorphismes

$$f_0 : \operatorname{Ker} P(f) \to \operatorname{Ker} P(f) \qquad f_1 : \operatorname{Im} P(f) \to \operatorname{Im} P(f)$$
$$u \mapsto f(u) \qquad v \mapsto f(v)$$

et $M_0(X), M_1(X)$ le polynôme minimal de f_0, f_1 respectivement.

1. Montrer que $M_0 \mid P$ et $M_1 \mid Q$.
2. Montrer que $M_0 = P$ et $M_1 = Q$.
3. Montrer que si $\operatorname{pgcd}(P, Q) = 1$, alors f est diagonalisable ssi f_0 et f_1 le sont.
4. Donner un exemple où f_0 et f_1 sont diagonalisables et f ne l'est pas.

Exercice 3. Soit E un espace euclidien. Une *projection orthogonale* est une projection sur un sous-espace vectoriel V de E parallèlement à son orthogonal $V^{\perp}$. Soient $p, q \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(E)$ des projections orthogonales.

1. Montrer que $p \circ q$ s'annule sur $\operatorname{Ker} q + (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q)$ et coïncide avec $p \circ q \circ p$ sur $\operatorname{Im} p$.
2. Montrer que p et q sont symétriques.
3. Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable.
4. Montrer que $E = (\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q) \oplus (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q)$.
5. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable. L'est-il dans une base orthogonale ?