Une propriété des groupes menus

Cédric Milliet — Université Claude Bernard, Lyon 1

Mons, Théorie des Modèles, décembre 2008

Théorème. *Un groupe menu infini a un sous-groupe abélien infini.*

Définition. *Une théorie T est menue si*

$$\mid S_n(\emptyset) \mid \leq \aleph_0 \text{ pour tout entier } n$$

ssi $\mid S_1(A) \mid \leq \aleph_0$ *pour tout ensemble A fini.*

Exemples. *Les théories $\aleph_0$-catégoriques, ω-stables, fortement minimales, fortement $d-$minimales.*

T dans L dénombrable, $N(T, \aleph_0)$?

1 ($\aleph_0$-catégorique), $\cancel{2}$ (Vaught), $3, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \quad 2^{\aleph_0}$

Conjecture. *(Vaught, 1961) C'est tout !*

Fait. *Si T a moins de $2^{\aleph_0}$ modèles dénombrables à isomorphismes près, T est menue.*

Corps menu

Fait. *(Wagner) Un corps commutatif menu infini est algébriquement clos.*

Théorème. *Un corps menu de caractéristique positive est commutatif.*

Corollaire. *La conjecture de Vaught est vrai pour la théorie d'un pur corps commutatif (et même pour la théorie d'un pur corps de caractéristique positive).*

Démonstration. $\square$

Groupe menu abélien

Fait. *(Wagner) Un groupe abélien menu G s'écrit $G = D \oplus F$ où D est divisible et F d'exposant fini.*

Corollaire. *La conjecture de Vaught est vrai pour la théorie d'un pur groupe abélien.*

Démonstration. $G = \left(\bigoplus_{p \text{ premier}} \bigoplus_{n_p} \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \bigoplus_{n_0} \mathbb{Q}_{n_0} \right) \oplus \left(\bigoplus_{q/n} \bigoplus_{m_q} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \right)$ $\square$

Théorème. *Un groupe nilpotent menu G est la somme centrale d'un groupe D divisible et d'un groupe F d'exposant fini.*

Quid d'un groupe non abélien ?

Groupe minimal

Définition. *Une structure* M *est minimale si* M *est infinie, et chaque partie de* M*, définissable avec paramètres dans* M*, est finie ou cofinie.*

Groupe minimal G : tout sous-groupe définissable propre est fini ; si le centre est fini, tout élément non central, étant de centralisateur fini, a sa classe de conjugaison infinie ; il n'y a donc qu'une classe de conjugaison non centrale, et $G/Z(G)$ est un groupe infini d'exposant fini dont tous les éléments $\neq 1$ sont conjugués : un tel groupe n'existe pas.

Conclusion. *(Reineke) Un groupe minimal est commutatif.*

Groupe d-minimal

Définition. *Une structure M est d-minimale si M est infinie, et ne se divise pas en plus de d parties infinies définissables ; ou encore : M est union d'au plus d ensembles définissables minimaux ; ou encore : les parties définissables de M , considérées à un ensemble fini près, forment un ensemble O de cardinal 2^d.*

Un groupe d-minimal G a une "composante connexe" G^0 qui est son plus petit sous-groupe définissable d'indice fini ; tous les sous-groupes propres définissables de G^0 sont finis, et G^0 est aussi d-minimal.

Supposons G^0 non-abélien ; son centre est fini, et tout élément non central a une classe de conjugaison infinie ; G^0 n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaison : tous ses sous-groupes normaux sont définissables, et il n'a pas de sous-groupe propre d'indice fini. Il agit donc trivialement sur O. Soient a et b non centraux dans G^0 ; pour tout conjugué $x.b.x^{-1}$ de b sauf un nombre fini, $a.x.b.x^{-1}$ est conjugué de b ; $Z(b)$ étant fini, pour presque tout x , $a.x.b.x^{-1}$ est conjugué de b ; de même, pour presque tout x , $x^{-1}.a.x.b$ est conjugué de a. Donc a et b sont conjugués, contradiction.

Conclusion. *(Poizat) Un groupe d-minimal est abélien par fini.*

Rang de Cantor d'un compact dénombrable X

$$X' = X \setminus \{\text{points isolés}\}$$

$$X^{n+1} = (X^n)'$$

$$X^\omega = \bigcap_{n \leq \omega} X^n$$

Fait. *Si X est un compact parfait, soit $X = \emptyset$, soit $\mid X \mid > \aleph_0$.*

Il existe un plus petit β tel que $X^\beta = \emptyset$. β est un ordinal successeur $\alpha + 1$. On appelle α le rang de Cantor de X, noté $CB(X)$, et $\mid X^\alpha \mid$ le degré de Cantor de X, noté $dCB(X)$, qui est un entier !

Rang d'un point x de X : $sup\{\alpha : x \in X^\alpha\}$.

Rang d'un ouvert O, rang de O muni de la topologie induite.

Proposition. *Soient O_1, O_2 deux ouverts de X.*

1) *Si $O_1 \subset O_2$, alors $CB(O_1) \leq CB(O_2)$*
2) $CB_A(O_1 \cup O_2) = max\{CB(O_1), CB(O_2)\}$
3) *Si O_1 et O_2 ont même rang de Cantor et sont disjoints, alors*

$$dCB(O_1 \cup O_2) = dCB(O_1) + dCB(O_2)$$

Proposition. *Soient X, Y deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$ une application. Alors,*

1) *Si f est ouverte et surjective, $CB(X) \geq CB(Y)$.*
2) *Si f est continue à fibres finies, $CB(Y) \geq CB(X)$.*
3) *Si f est continue, ouverte, et surjective à fibres finies de cardinal au plus un entier n, $dCB(Y) \leq dCB(X) \leq n.dCB(Y)$.*
4) *En particulier si f est bijective et bicontinue, X et Y ont même rang et même degré.*

Rang de Cantor d'une théorie menue T

Pour tout A fini, $S_n(A)$ est un compact dénombrable. On note $CB_A(\varphi)$ et $dCB_A(\varphi)$ les rangs et degré de Cantor de $[\varphi]$ muni de la topologie induite. On confondra formule et ensemble définissable.

Proposition. *Soient D et D' deux parties A-définissables.*

1) *Si $D \subset D'$, alors $CB_A(D) \leq CB_A(D')$*

2) $CB_A(D \cup D') = max\{CB_A(D), CB_A(D')\}$

3) *Si D et D' ont même rang de Cantor et sont disjoints,*

$$dCB_A(D \cup D') = dCB_A(D) + dCB_A(D')$$

4) $CB_A(D) \geq \alpha + 1$ *ssi il existe des ensembles $(D_i)_{i \in \omega}$ dans D, A-défiissables, deux-à-deux disjoints, avec $CB(D_i) \geq \alpha$ pour tout i.*

5) $dCB_A(D)$ *est le plus grand entier d tel que l'on puisse diviser D en d ensembles définissables deux-à-deux disjoints de rang $CB_A(D)$.*

Proposition. *Soit D, D' deux ensembles $A-$définissables, et $f : D \to D'$ une application $A-$définissable. Alors,*

1) *Si f est surjective, $CB_A(D) \geq CB_A(D')$.*
2) *Si f est à fibres finies, $CB_A(D') \geq CB_A(D)$.*
3) *Si f est surjective à fibres finies de cardinal au plus un entier n, alors D et D' ont même rang de Cantor-Bendixson sur A, et*

$$dCB_A(D') \leq dCB_A(D) \leq n.dCB_A(D')$$

Proposition. *Soit X un ensemble définissable sans paramètres, et a est algébrique sur le vide de degré n, alors*

1) $CB_a(X) = CB_\emptyset(X)$
2) $dCB_\emptyset(X) \leq dCB_a(X) \leq n \cdot dCB_\emptyset(X)$

Groupe menu

Proposition. Soit G un groupe menu non abélien. Il existe un élément non central a dans G dont le centralisateur $Z(a)$ est infini.

Démonstration. Supposons que tous les centralisateurs sont finis.

(1) G n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaisons.

Par compacité, les centralisateurs sont de taille au plus un entier n. Pour tout a dans G, $G \to a^G, x \mapsto a^x$ est surjecctive à fibres finies de taille au plus n, donc pour toute clôture définissable finie d contenant a, a^G est de rang de Cantor sur d maximal, et de degré au moins $dCB_d(G)/n$. Il y a donc au plus n classes de conjugaisons dans G, disons m, que l'on note $a_1^G, \ldots, a_m^G$. On ne perd rien à rajouter les paramètres a_i au langage.

(2) On peut supposer que G est sans sous-groupe distingué non trivial.

Remarquons qu'un sous-groupe distingué de G n'est rien d'autre qu'une réunion de classes de conjugaisons de G. En particulier, il est d'indice fini. Quitte à considérer une réunion minimale de classes de conjugaisons, on peut supposer G sans sous-groupe distingué non trivial.

D'après un théorème de P. Hall et C. R. Kulatilaka [2], qui dit que tout groupe infini localement fini a un sous-groupe abélien infini on peut supposer que le groupe G n'est pas localement fini. Soit $A = acl(b)$ une clôture algébrique infinie finiment engendrée par un uple b.

(3) A a un nombre fini de classes de conjugaisons.

Tout x dans A s'écrit a_i^y, avec y algébrique sur a_i, x puisque l'application $G \to a^G, x \mapsto a^x$ est à fibres finies. Donc A également a m classes de conjugaisons.

(4) On peut supposer que les sous-groupes distingués de A sont triviaux.

Comme G est sans sous-groupe distingué, aucune sous-réunion de classses de conjugaison n'est stable par multiplication, donc pour toute sous-réunion X de classes de conjugaisons de G (il en existe un nombre fini), il existe x, y dans X tel que $x \cdot y$ ne soit pas dans X. Quitte à rajouter tout ces paramètres au langage, on peut supposer qu'aucune sous-réunion de classes de conjugaisons de A n'est stable par multiplication. En particulier, les sous-groupe distingués de A sont triviaux. Pour X un ensemble A-définissable, posons

$$Stab_A(X) = \{g \in A : CB_{g,b}(g \cdot X \Delta X) < CB_b(X))\}$$

(5) Pour tout X A-définissable, $Stab_A(X)$ est un sous-groupe de A. Si X est invariant par conjugaison, alors $Stab_A(X)$ est distingué.

(6) Soit $m = dCB_b(G)$, $l = dCB_b(a^G)$. *On a* $[dcl(b) : Stab_{dcl(b)}a^G] \leq C^l_m$.

Il y a m types génériques dans G ; et pour un coset de deg l de a^G, il y a C^l_m choix pour ses types génériques, donc en prenant $C^l_m + 1$ représentants de cosets d'une classe a^G dans $dcl(b)$, nécessairement au mois deux d'entre eux auront les mêmes types génériques. Il en résulte que $Stab_A$ ne peut être réduit au neutre et, en vertue de (4) et (5) :

(7) Pour toute classe de conjugaison a^G *de* G, $Stab_A(a^G) = A$

(8) G n'a qu'une classe de conjugaison non centrale

Soient a et b non centraux dans G. pour tout conjugué xbx^{-1} de b sauf un ensemble rang de Cantor sur a, b non maximal, $axbx^{-1}$ est conjugué a b. Comme une surjection a fibre finie préserve le rang de Cantor, pour tout x sauf un ensemble de petit rang de Cantor, $axbx^{-1}$ est conjugué à b. De même, par symétrie, pour tout x sauf un ensemble de petit rang de Cantor, $x^{-1}axb$ est conjugué à a. On peut donc trouver un x tel que $axbx^{-1}$ et $x^{-1}axb$ soient conjugués respectivement à b et a. Donc b et a sont conjugués. Meme contradiction que pour le cas minimal. $\square$

Corollaire. *Un groupe menu infini a un sous-groupe abélien infini.*

Démonstration. Soit $Z(a_0)$ un centalisateur infini. C'est un groupe menu : il a un élément non central a_1, de centralisateur $Z(a_0, a_1)$ infini. $Z(a_0, a_1)$ est menu... on itère. $\langle a_i : i \geq 0 \rangle$ est abélien. $\square$

Peut-on faire mieux, c'est-à-dire trouver un sous-groupe définissable abélien infini ? La réponse est en général non, puisque J.M. Plotkin a montré qu'il existe des groupes $\aleph_0-$catégoriques infinis sans sous-groupe définissable abélien infini [4].

Références

[1] A. Borovik et A. Nesin, Groups of finite Morley rank, Oxford university press, 1994.

[2] P. Hall et C. R. Kulatilaka, *A Property of Locally Finite Groups*, Journal of the London Mathematical Society, vol. 39, 1964.

[3] C. Milliet, *Small Skew fields*, Mathematical Logic Quarterly, vol. 53, n°1, 2007.

[4] J.M. Plotkin, *ZF and locally finite groups*, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, vol. 27, 1981.

[5] F. O. Wagner, *Quasi-endomorphisms in small stable groups*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 58, 1993.

[6] F.O. Wagner, *Small fields*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 63, n°3, 1998.