Des Intersections avec des Tores

A. Martin-Pizarro
Institut Camille Jordan
C.N.R.S.
France

Rencontre Modnet, Mons
Déc, 18-19 2008
Mons, Belgique

Introduction

Soit $K \models ACF_p$.

Introduction

Soit $K \models ACF_p$.

- $\left.\begin{array}{l}\text{Dégré de transcendance}\\ \text{Dimension de Zariski}\end{array}\right\}$

Introduction

Soit $K \models ACF_p$.

- $\left.\begin{array}{l}\text{Dégré de transcendance}\\ \text{Dimension de Zariski}\end{array}\right\} \Longrightarrow$ Rang de Morley

Introduction

Soit $K \models ACF_p$.

- $\left.\begin{array}{l}\text{Dégré de transcendance}\\ \text{Dimension de Zariski}\end{array}\right\} \Longrightarrow$ Rang de Morley

Si G est un groupe algébrique sur K $\Longrightarrow$ G est de rang de Morley fini.

Introduction

Soit $K \models ACF_p$.

- $\left.\begin{array}{l}\text{Dégré de transcendance}\\ \text{Dimension de Zariski}\end{array}\right\} \Longrightarrow$ Rang de Morley

Si G est un groupe algébrique sur K $\Longrightarrow$ G est de rang de Morley fini.

Y a-t-il des groupes de rang de Morley fini pathologiques ?

La conjecture de l'algébricité

Tout groupe simple de rang de Morley fini peut être interprété comme un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

La conjecture de l'algébricité

Tout groupe simple de rang de Morley fini peut être interprété comme un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

Théorème

[B,H,MP,W] Il existe une quantité non dénombrable des corps mauvais dénombrables de caractéristique 0 et rang 2, non-isomorphes deux à deux.

La conjecture de l'algébricité

Tout groupe simple de rang de Morley fini peut être interprété comme un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

Théorème

[B,H,MP,W] Il existe une quantité non dénombrable des corps mauvais dénombrables de caractéristique 0 et rang 2, non-isomorphes deux à deux.

La preuve utilise la méthode d'amalgamation de Hrushovski-Fraïssé et une version faible de la *CIT*.

CIT

Théorème [Weak CIT] (car. 0)

Pour toute varieté $V_{\bar{b}}$ de $\mathbb{G}_m^n$, il existe une famille finie de sous-groupes multiplicatifs propres $\mathcal{F}$ (qui ne dépend pas de $\bar{b}$) telle que pour tout tore T et toute composante irréductible atypique W de $V \cap \bar{a}T$, si

$$\dim(W) > \dim(V) + \dim(T) - n$$

alors il y a un élément $H \in \mathcal{F}$ tel que $W \subset \bar{a}H$.

CIT

Théorème [Weak CIT] (car. 0)

Pour toute varieté $V_{\bar{b}}$ de $\mathbb{G}_m^n$, il existe une famille finie de sous-groupes multiplicatifs propres $\mathcal{F}$ (qui ne dépend pas de $\bar{b}$) telle que pour tout tore T et toute composante irréductible atypique W de $V \cap \bar{a}T$, si

$$\dim(W) > \dim(V) + \dim(T) - n$$

alors il y a un élément $H \in \mathcal{F}$ tel que $W \subset \bar{a}H$.

Remarque

Si on demande une nombre fini de cossettes, la conjecture est ouverte et elle entraîne Mordell-Lang pour des sous-varietés de $\mathbb{G}_m^n$ (montrée par Laurent).

Preuve de la Weak CIT

Sinon, on a que pour toute famille finie $\mathcal{F}$ il existe un tore T , un paramètre $\bar{b}$ et $\bar{a}$ t.q.:

Preuve de la Weak CIT

Sinon, on a que pour toute famille finie $\mathcal{F}$ il existe un tore T , un paramètre $\bar{b}$ et $\bar{a}$ t.q.:

- Une composante W de $\bar{a}T \cap V_{\bar{b}}$ est atypique dans $V_{\bar{b}}$.

Preuve de la Weak CIT

Sinon, on a que pour toute famille finie $\mathcal{F}$ il existe un tore T , un paramètre $\bar{b}$ et $\bar{a}$ t.q.:

- Une composante W de $\bar{a}T \cap V_{\bar{b}}$ est atypique dans $V_{\bar{b}}$.
- W n'est pas contenue dans aucune cossette des éléments de $\mathcal{F}$.

Preuve de la Weak CIT

Sinon, on a que pour toute famille finie $\mathcal{F}$ il existe un tore T , un paramètre $\bar{b}$ et $\bar{a}$ t.q.:

- Une composante W de $\bar{a}T \cap V_{\bar{b}}$ est atypique dans $V_{\bar{b}}$.
- W n'est pas contenue dans aucune cossette des éléments de $\mathcal{F}$.

On peut supposer que $\dim(T)$ est constante et égale à r

Preuve de la Weak CIT

Sinon, on a que pour toute famille finie $\mathcal{F}$ il existe un tore T, un paramètre $\bar{b}$ et $\bar{a}$ t.q.:

- Une composante W de $\bar{a}T \cap V_{\bar{b}}$ est atypique dans $V_{\bar{b}}$.
- W n'est pas contenue dans aucune cossette des éléments de $\mathcal{F}$.

On peut supposer que $\dim(T)$ est constante et égale à r

En coupant W avec un hyperplan générique, on peut supposer que l'intersection est de dimension 1

Preuve de la Weak CIT

Sinon, on a que pour toute famille finie $\mathcal{F}$ il existe un tore T, un paramètre $\bar{b}$ et $\bar{a}$ t.q.:

- Une composante W de $\bar{a}T \cap V_{\bar{b}}$ est atypique dans $V_{\bar{b}}$.
- W n'est pas contenue dans aucune cossette des éléments de $\mathcal{F}$.

On peut supposer que $\dim(T)$ est constante et égale à r

En coupant W avec un hyperplan générique, on peut supposer que l'intersection est de dimension 1

Soit D une dérivation sur K

Preuve de la Weak CIT

Sinon, on a que pour toute famille finie $\mathcal{F}$ il existe un tore T , un paramètre $\bar{b}$ et $\bar{a}$ t.q.:

- Une composante W de $\bar{a}T \cap V_{\bar{b}}$ est atypique dans $V_{\bar{b}}$.
- W n'est pas contenue dans aucune cossette des éléments de $\mathcal{F}$.

On peut supposer que $\dim(T)$ est constante et égale à r

En coupant W avec un hyperplan générique, on peut supposer que l'intersection est de dimension 1

Soit D une dérivation sur K $\rightsquigarrow$ Une section de $K[X]/(X^2) \to K$

Preuve de la Weak CIT

Sinon, on a que pour toute famille finie $\mathcal{F}$ il existe un tore T , un paramètre $\bar{b}$ et $\bar{a}$ t.q.:

- Une composante W de $\bar{a}T \cap V_{\bar{b}}$ est atypique dans $V_{\bar{b}}$.
- W n'est pas contenue dans aucune cossette des éléments de $\mathcal{F}$.

On peut supposer que $\dim(T)$ est constante et égale à r

En coupant W avec un hyperplan générique, on peut supposer que l'intersection est de dimension 1

Soit D une dérivation sur $K \rightsquigarrow$ Une section de $K[X]/(X^2) \to K$

Elle induit un homomorphisme $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_m} : \mathbb{G}_m \to T_0(\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{G}_a$, la *dérivée logarithmique*

Preuve de la Weak CIT

Sinon, on a que pour toute famille finie $\mathcal{F}$ il existe un tore T , un paramètre $\bar{b}$ et $\bar{a}$ t.q.:

- Une composante W de $\bar{a}T \cap V_{\bar{b}}$ est atypique dans $V_{\bar{b}}$.
- W n'est pas contenue dans aucune cossette des éléments de $\mathcal{F}$.

On peut supposer que $\dim(T)$ est constante et égale à r

En coupant W avec un hyperplan générique, on peut supposer que l'intersection est de dimension 1

Soit D une dérivation sur $K \rightsquigarrow$ Une section de $K[X]/(X^2) \to K$

Elle induit un homomorphisme $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_m} : \mathbb{G}_m \to T_0(\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{G}_a$, la *dérivée logarithmique*, avec noyau C^*.

Remarquons que $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a} : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$.

Remarquons que $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a} : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$.

$\bar{a}$ est dans $\bar{c}T \iff \mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_m}(\bar{a})$ est dans un $\mathbb{Q}$–sous-espace lineaire.

Remarquons que $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a} : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$.

$\bar{a}$ est dans $\bar{c}T \iff \mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_m}(\bar{a})$ est dans un $\mathbb{Q}$–sous-espace lineaire.

Par compacité on obtient un corps différentiellement clos K' contenant K t.q. :

- Il existe $\bar{b}$ dans C et $\bar{a}$ dans $V_{\bar{b}}$.

Remarquons que $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a} : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$.

$\bar{a}$ est dans $\bar{c}T \iff \mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_m}(\bar{a})$ est dans un $\mathbb{Q}$–sous-espace lineaire.

Par compacité on obtient un corps différentiellement clos K' contenant K t.q. :

- Il existe $\bar{b}$ dans C et $\bar{a}$ dans $V_{\bar{b}}$.
- $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_m}(\bar{a}) = \mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a}(\bar{\beta})$ pour $\bar{\beta}$ dans $\mathbb{G}_a^n$.

Remarquons que $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a} : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$.

$\bar{a}$ est dans $\bar{c}T \iff \mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_m}(\bar{a})$ est dans un $\mathbb{Q}$–sous-espace lineaire.

Par compacité on obtient un corps différentiellement clos K' contenant K t.q. :

- Il existe $\bar{b}$ dans C et $\bar{a}$ dans $V_{\bar{b}}$.
- $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_m}(\bar{a}) = \mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a}(\bar{\beta})$ pour $\bar{\beta}$ dans $\mathbb{G}_a^n$.
- $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a}(\bar{\beta})$ est $\mathbb{Q}$–lin. indépendants.

Remarquons que $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a} : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$.

$\bar{a}$ est dans $\bar{c}T \iff \mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_m}(\bar{a})$ est dans un $\mathbb{Q}$–sous-espace lineaire.

Par compacité on obtient un corps différentiellement clos K' contenant K t.q. :

- Il existe $\bar{b}$ dans C et $\bar{a}$ dans $V_{\bar{b}}$.
- $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_m}(\bar{a}) = \mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a}(\bar{\beta})$ pour $\bar{\beta}$ dans $\mathbb{G}_a^n$.
- $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a}(\bar{\beta})$ est $\mathbb{Q}$–lin. indépendants.
- Mais $\mathrm{tr.deg}_C(\bar{\beta}) \leq r$.

Remarquons que $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a} : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$.

$\bar{a}$ est dans $\bar{c}T \iff \mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_m}(\bar{a})$ est dans un $\mathbb{Q}$–sous-espace lineaire.

Par compacité on obtient un corps différentiellement clos K' contenant K t.q. :

- Il existe $\bar{b}$ dans C et $\bar{a}$ dans $V_{\bar{b}}$.
- $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_m}(\bar{a}) = \mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a}(\bar{\beta})$ pour $\bar{\beta}$ dans $\mathbb{G}_a^n$.
- $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a}(\bar{\beta})$ est $\mathbb{Q}$–lin. indépendants.
- Mais $\mathrm{tr.deg}_C(\bar{\beta}) \leq r$.

Le théorème d'Ax sur Schanuel

Remarquons que $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a} : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$.

$\bar{a}$ est dans $\bar{c}T \iff \mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_m}(\bar{a})$ est dans un $\mathbb{Q}$–sous-espace lineaire.

Par compacité on obtient un corps différentiellement clos K' contenant K t.q. :

- Il existe $\bar{b}$ dans C et $\bar{a}$ dans $V_{\bar{b}}$.
- $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_m}(\bar{a}) = \mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a}(\bar{\beta})$ pour $\bar{\beta}$ dans $\mathbb{G}_a^n$.
- $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a}(\bar{\beta})$ est $\mathbb{Q}$–lin. indépendants.
- Mais $\mathrm{tr.deg}_C(\bar{\beta}) \leq r$.

Le théorème d'Ax sur Schanuel $\implies \mathrm{tr.deg}_C(\bar{a}\bar{\beta}) \geq n+1$

Remarquons que $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a} : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$.

$\bar{a}$ est dans $\bar{c}T \iff \mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_m}(\bar{a})$ est dans un $\mathbb{Q}$–sous-espace lineaire.

Par compacité on obtient un corps différentiellement clos K' contenant K t.q. :

- Il existe $\bar{b}$ dans C et $\bar{a}$ dans $V_{\bar{b}}$.
- $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_m}(\bar{a}) = \mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a}(\bar{\beta})$ pour $\bar{\beta}$ dans $\mathbb{G}_a^n$.
- $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a}(\bar{\beta})$ est $\mathbb{Q}$–lin. indépendants.
- Mais $\mathrm{tr.deg}_C(\bar{\beta}) \leq r$.

Le théorème d'Ax sur Schanuel $\implies$ $\mathrm{tr.deg}_C(\bar{a}\bar{\beta}) \geq n + 1$

Donc dim $V \geq \mathrm{tr.deg}_C(\bar{a}) \geq n + 1 - r$

Remarquons que $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a} : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$.

$\bar{a}$ est dans $\bar{c}T \iff \mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_m}(\bar{a})$ est dans un $\mathbb{Q}$–sous-espace lineaire.

Par compacité on obtient un corps différentiellement clos K' contenant K t.q. :

- Il existe $\bar{b}$ dans C et $\bar{a}$ dans $V_{\bar{b}}$.
- $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_m}(\bar{a}) = \mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a}(\bar{\beta})$ pour $\bar{\beta}$ dans $\mathbb{G}_a^n$.
- $\mathfrak{L}\partial_{\mathbb{G}_a}(\bar{\beta})$ est $\mathbb{Q}$–lin. indépendants.
- Mais $\mathrm{tr.deg}_C(\bar{\beta}) \leq r$.

Le théorème d'Ax sur Schanuel $\implies \mathrm{tr.deg}_C(\bar{a}\bar{\beta}) \geq n+1$

Donc dim $V \geq \mathrm{tr.deg}_C(\bar{a}) \geq n+1-r$ **CONTRADICTION.**

CIT est fausse en car. p

Exemple

Soit $V = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{G}_m^4 \mid x + y = 1 \ , \ u + v = 1 \ \}$

CIT est fausse en car. p

Exemple

Soit $V = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{G}_m^4 \mid x + y = 1\ ,\ u + v = 1\ \} \rightsquigarrow$ dim. 2.

CIT est fausse en car. p

Exemple

Soit $V = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{G}_m^4 \mid x + y = 1 \text{ , } u + v = 1 \text{ } \} \rightsquigarrow$ dim. 2.
Considérons $T_n = \{(x, y, x^{p^n}, y^{p^n})\}$

CIT est fausse en car. p

Exemple

Soit $V = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{G}_m^4 \mid x + y = 1 \text{ , } u + v = 1 \} \rightsquigarrow$ dim. 2.
Considérons $T_n = \{(x, y, x^{p^n}, y^{p^n})\} \rightsquigarrow \dim T_n = 2$.

CIT est fausse en car. p

Exemple

Soit $V = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{G}_m^4 \mid x + y = 1 \, , u + v = 1 \ \} \rightsquigarrow$ dim. 2.
Considérons $T_n = \{(x, y, x^{p^n}, y^{p^n})\} \rightsquigarrow$ dim $T_n = 2$.
$V \cap T_n$ est de dim. 1

CIT est fausse en car. p

Exemple

Soit $V = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{G}_m^4 \mid x + y = 1 \ , u + v = 1 \ \} \rightsquigarrow$ dim. 2.
Considérons $T_n = \{(x, y, x^{p^n}, y^{p^n})\} \rightsquigarrow$ dim $T_n = 2$.
$V \cap T_n$ est de dim. 1 $\rightsquigarrow$ **atypique.**

CIT est fausse en car. p

Exemple

Soit $V = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{G}_m^4 \mid x + y = 1 \, , u + v = 1 \} \rightsquigarrow$ dim. 2.
Considérons $T_n = \{(x, y, x^{p^n}, y^{p^n})\} \rightsquigarrow$ dim $T_n = 2$.
$V \cap T_n$ est de dim. 1 $\rightsquigarrow$ **atypique.**
Mais aucune famille finie ne détermine toutes ces intersections!!!

CIT est fausse en car. p

Exemple

Soit $V = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{G}_m^4 \mid x + y = 1 \text{ , } u + v = 1 \} \rightsquigarrow$ dim. 2.
Considérons $T_n = \{(x, y, x^{p^n}, y^{p^n})\} \rightsquigarrow \dim T_n = 2$.
$V \cap T_n$ est de dim. 1 $\rightsquigarrow$ **atypique**.
Mais aucune famille finie ne détermine toutes ces intersections!!!

Question

Peut-on généraliser la preuve pour un énoncé approprié?

Dérivations de Hasse-Schmidt

Si $K \models SCF_{p,1}$, il admet des dérivations HS strictes $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

Dérivations de Hasse-Schmidt

Si $K \models SCF_{p,1}$, il admet des dérivations HS strictes $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

$$D_0 = \mathrm{Id} \qquad D_n(xy) = \sum_{i+j=n} D_i(x)D_j(y)$$

$$D_1 = \text{dérivation} \qquad D_i \circ D_j = \binom{i+j}{i} D_{i+j}$$

Dérivations de Hasse-Schmidt

Si $K \models SCF_{p,1}$, il admet des dérivations HS strictes $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

$$D_0 = \mathrm{Id} \qquad D_n(xy) = \sum_{i+j=n} D_i(x)D_j(y)$$

$$D_1 = \text{dérivation} \qquad D_i \circ D_j = \binom{i+j}{i} D_{i+j}$$

Une section de $K[[X]] \to K$

Dérivations de Hasse-Schmidt

Si $K \models SCF_{p,1}$, il admet des dérivations HS strictes $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

$$D_0 = \mathrm{Id} \qquad D_n(xy) = \sum_{i+j=n} D_i(x)D_j(y)$$

$$D_1 = \text{dérivation} \qquad D_i \circ D_j = \binom{i+j}{i} D_{i+j}$$

$\mathfrak{L}\partial$ existe

Une section de $K[[X]] \to K \rightsquigarrow$

Dérivations de Hasse-Schmidt

Si $K \models SCF_{p,1}$, il admet des dérivations HS strictes $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

$$D_0 = \mathrm{Id} \qquad D_n(xy) = \sum_{i+j=n} D_i(x)D_j(y)$$

$$D_1 = \text{dérivation} \qquad D_i \circ D_j = \binom{i+j}{i} D_{i+j}$$

$\mathfrak{L}\partial$ existe

Une section de $K[[X]] \to K \rightsquigarrow$ À valeurs dans un groupe pro-algébrique

Dérivations de Hasse-Schmidt

Si $K \models SCF_{p,1}$, il admet des dérivations HS strictes $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

$$D_0 = \mathrm{Id} \qquad D_n(xy) = \sum_{i+j=n} D_i(x)D_j(y)$$

$$D_1 = \text{dérivation} \qquad D_i \circ D_j = \binom{i+j}{i} D_{i+j}$$

Une section de $K[[X]] \to K \rightsquigarrow$ $\mathfrak{L}\partial$ existe
À valeurs dans un groupe pro-algébrique
l'espace d'arcs

Ax en p ?

Un groupe 1-dim. $\rightsquigarrow$ **Hauteur**

Ax en p ?

Un groupe 1-dim. $\rightsquigarrow$ **Hauteur** $\rightsquigarrow$ Isomorphisme de groupes formels

Ax en p ?

Un groupe 1-dim. $\rightsquigarrow$ **Hauteur** $\rightsquigarrow$ Isomorphisme de groupes formels $\rightsquigarrow$ Morphisme d'arcs.

Ax en p ?

Un groupe 1-dim. $\rightsquigarrow$ **Hauteur** $\rightsquigarrow$ Isomorphisme de groupes formels $\rightsquigarrow$ Morphisme d'arcs.

$\mathbb{G}_m$ et une courbe elliptique non-supersingulière ont hauteur 1.

Ax en p ?

Un groupe 1-dim. $\rightsquigarrow$ **Hauteur** $\rightsquigarrow$ Isomorphisme de groupes formels $\rightsquigarrow$ Morphisme d'arcs.

$\mathbb{G}_m$ et une courbe elliptique non-supersingulière ont hauteur 1.

Problème

En dim ≥ 2 (e.g. G_m^n), l'inséparabilité entraîne que l'on n'a pas d'injections au niveau de formes de Hasse,

Ax en p ?

Un groupe 1-dim. $\rightsquigarrow$ **Hauteur** $\rightsquigarrow$ Isomorphisme de groupes formels $\rightsquigarrow$ Morphisme d'arcs.

$\mathbb{G}_m$ et une courbe elliptique non-supersingulière ont hauteur 1.

Problème

En dim ≥ 2 (e.g. G_m^n), l'inséparabilité entraîne que l'on n'a pas d'injections au niveau de formes de Hasse, **même en un point lisse!**

Et donc CIT_p ?

Encore des problèmes

Pour $\mathbb{G}_a$ (car. 0), les sous-algèbres de Lie correspondent aux groupes formels (ou analytiques)

Et donc CIT_p ?

Encore des problèmes

Pour $\mathbb{G}_a$ (car. 0), les sous-algèbres de Lie correspondent aux groupes formels (ou analytiques) qui sont algébriques!!!

Et donc CIT_p ?

Encore des problèmes

Pour $\mathbb{G}_a$ (car. 0), les sous-algèbres de Lie correspondent aux groupes formels (ou analytiques) qui sont algébriques!!!
Cela n'est pas vrai pour $\mathbb{G}_m$!!

Et donc CIT_p ?

Encore des problèmes

Pour $\mathbb{G}_a$ (car. 0), les sous-algèbres de Lie correspondent aux groupes formels (ou analytiques) qui sont algébriques!!!
Cela n'est pas vrai pour $\mathbb{G}_m$!!

Approche ?

Peut-on approximer ces algèbres de Lie par des suites de groupes algébriques ? (C.à.d. remplacer $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Z}_p$)